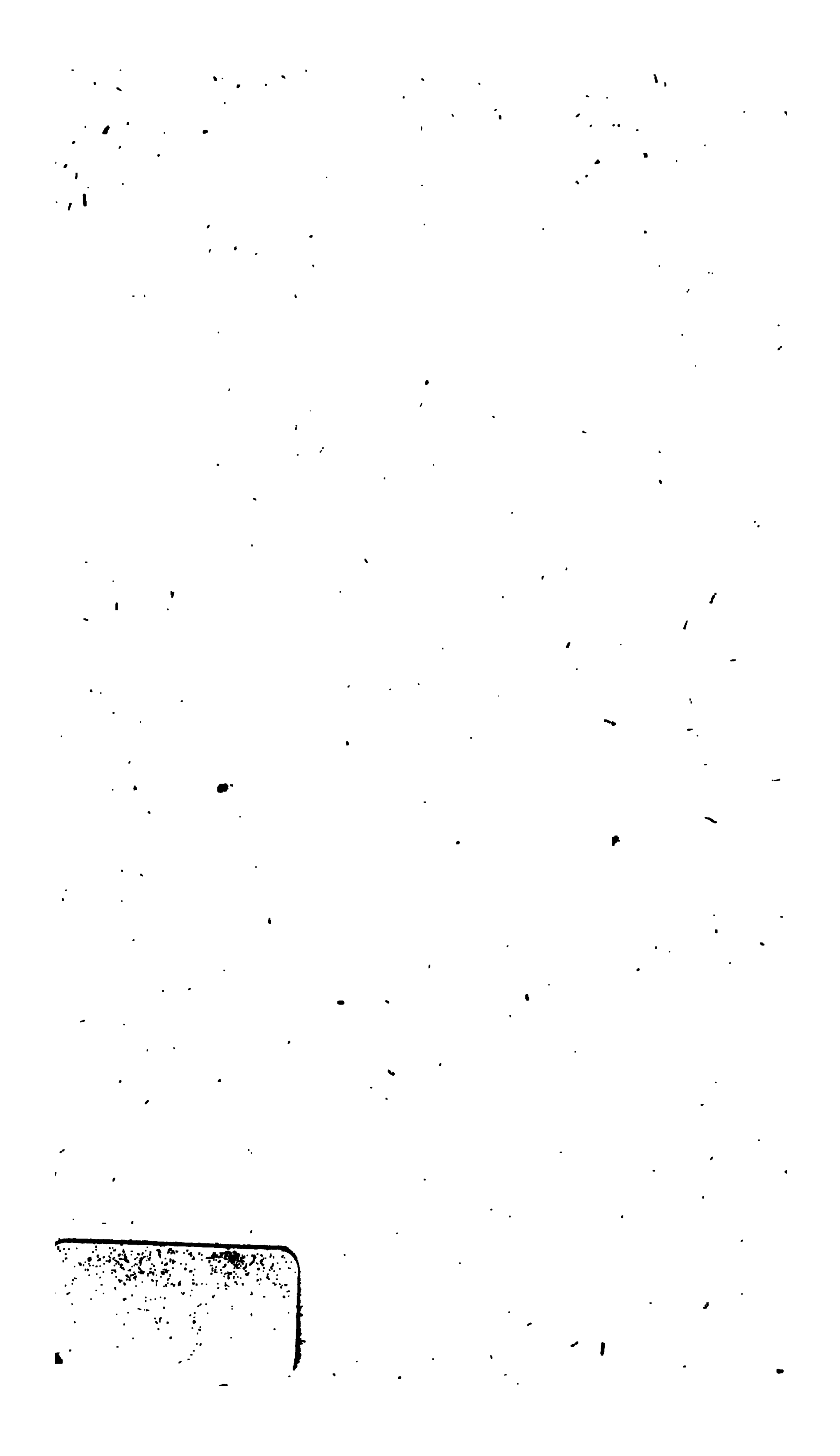
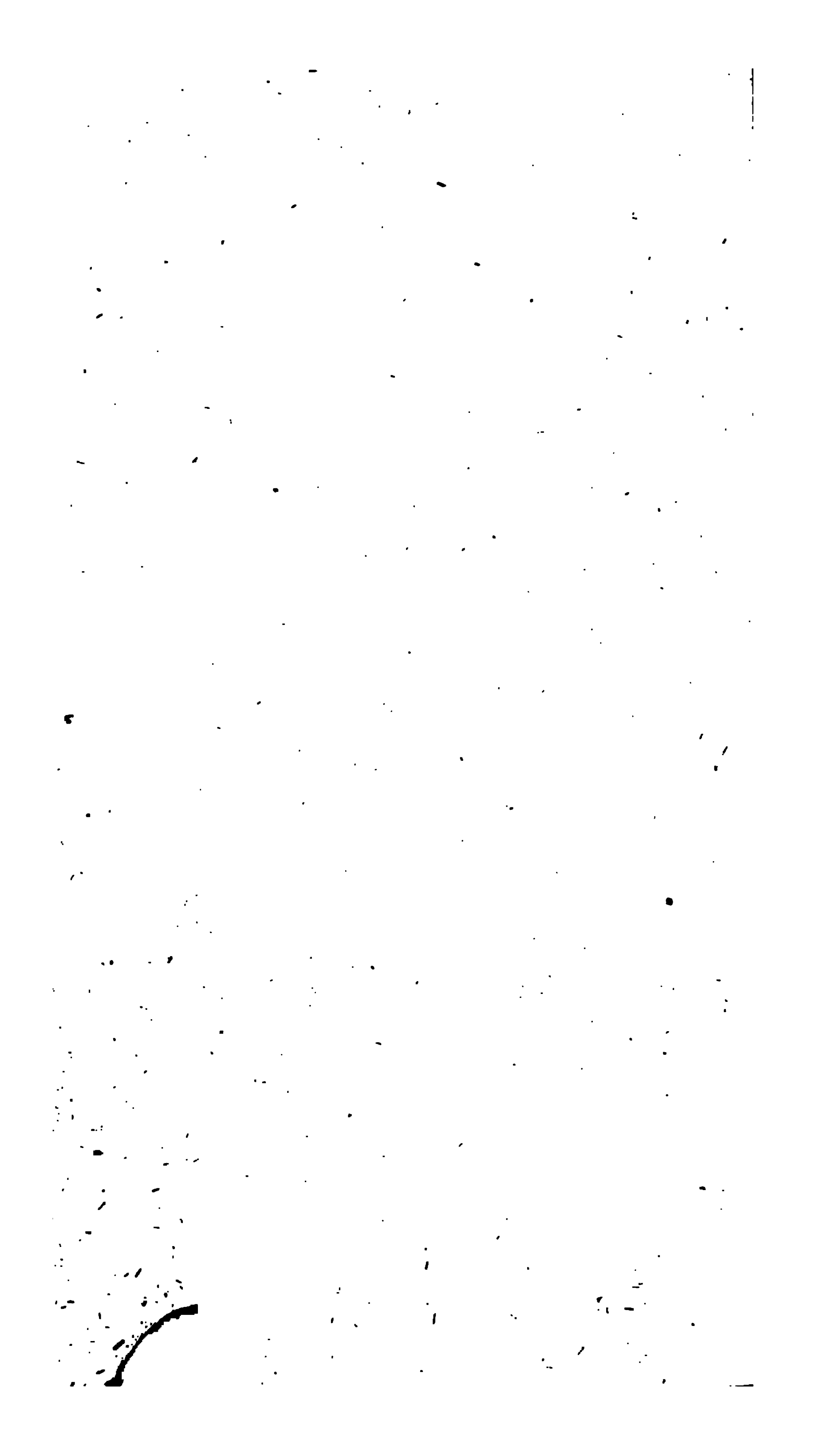




S

ik
ie,

ıng



Bündige und reine Darstellung

des

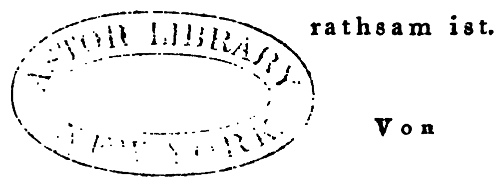
wahrhaften

Infinitesimal-Calculs

wie sie

besonders auch für wissenschaftliche Praktiker

rathsam ist.



Von

D. *Friedrich Gottlieb von Busse*,

Berg-Commissionsrath und Professor der Mathematik, Physik und Bergmaschinen-Lehre an der Kön. Sächs. Bergakademie, Senator im Rathe und Assessor im Bergschöppenstuhle zu Freyberg; mehrer gel. Gesellsch. Mitgliede.

Zweiter Band.
Beschluſs der Differentialrehnung
mit der IIten Kupfertafel.

Dresden, 1826,
in der Arnoldischen Buchhandlung.

Vorrede.

Alle hier folgenden Kapitel sind aus einzelen umständlichen Untersuchungen genommen, die ich in sehr verschiedenen, zum Theil sehr weit von einander entfernten Zeiten angestellt hatte; daher z. B. im Anfange des letzten Kapitels einige Erklärungen wiederholt vorkommen, die auch in früheren Kapiteln schon gegeben waren. Obgleich ich bei der Correctur es allerdings bemerkte, dafs einige Zeilen erspart werden konnten: so mufste ich doch fürchten, durch solche Umänderung neuen Aufenthalt im Drucke zu verursachen, der überdies durch die Entfernung des Druckortes sehr verzögert wird. Hiermit wird freilich eingestanden, dafs ich auch das Druckfertigmachen nur nach und nach für einzele Kapitel vorgenommen habe! — Ich vermag es nun einmal nicht über mich, dieser öden Arbeit mich hinzugeben, bis ich durch den bereits angefangenen Druck dazu gezwungen bin.

Mag ich immerhin mir selbst es eingestehen müssen, dafs ich eine gewisse Heiterkeit und Stärke des Geistes in meinem Alter hauptsächlich der Achtung und Zuneigung zu verdanken habe, deren mich meine Umgebungen zu würdigen scheinen: so bin ich es doch deutlich mir bewufst, dafs die vielen Eigenthümlichkeiten dieses Lehrbuches nicht aus Ruhmsucht, oder einer jetzt so gewöhnlichen, mir selbst sehr verhafsten Neuerungsucht entstanden sind; sondern weil ich hoffte, zum gröfsten Theil auch durch Erfahrung davon überzeugt war, dafs Anfängern von gehörigen Geisteskräften*) die Erlernung des höhern Calculs dadurch erleichtert, auch das System dieses Calculs in einigen wesentlichen Stücken berichtigt, und hie und da vielleicht beachtungswerth erweitert seyn werde.

---

*) Von gehörigen Geisteskräften! — Rechnenmaschinen und Gedächtnifskrämer sollte man zur höhern Mathematik, besonders wo deren praktische Anwendung hauptsächlich beabsichtigt wird, gar nicht zulassen. Auch das Ende dieses Blattes verhindert mich, öffentliche Beispiele darüber zur Warnung auszustellen.

Obgleich ich in der Vorrede zum ersten Bande es anders bestimmt hatte, so hat es doch nachher mir schicklicher geschienen, diesen Beschlufs der Differentialrechnung zuvörderst folgen zu lassen. Die noch rückständige Integralrechnung soll mehr als ein Alphabet nicht einnehmen, und wird, wo nicht zur nächsten Ostermesse selbst, doch gegen ihre Versendungszeit hoffentlich abgedruckt seyn.

Freyberg, im December 1825.

Inhalt des IIten Bandes.

Beschlufs der Differentialrechnung.

Neunzehntes Capitel.

Anwendung der Differentialquotienten, um den Werth einer gebrochenen Function $\frac{Z}{N}$ zu finden, wo sie ihn als $=\frac{0}{0}$ unbestimmt läſst.

§. 1. Wenn $S = a + ae + ae^2 \ldots + ae^{n-1}$, also S die Summe jeder geometrischen Reihe von n Gliedern bedeutet, deren erstes Glied $= a$ und deren Exponent $= e$ ist, so hat man auch $\frac{S}{a} = 1 + e + e^2 \ldots + e^{n-1}$, folglich auch $(e-1).\frac{S}{a} = \begin{cases} e + e^2 + e^3 \ldots + e^{n-1} + e^n \\ -1 - e - e^2 - e^3 \ldots - e^{n-1} \end{cases}$

muſs also $S = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}$ seyn.

§. 2. Allerdings wird auch dieser Formel gemäſs die Summe einer jeden geometrischen Reihe aus ihrem ersten Gliede, ihrem Exponenten und ihrer Gliederanzahl niemals unrichtig angegeben; aber unbestimmend muſs diese Angabe für $e = 1$ sich darstellen. Die Formel gibt dafür $S = a.\frac{1^n - 1}{1 - 1} = a\frac{0}{0}$, und vermag dafür, wenn man ihr e mit einem Male $= 1$ setzt, etwas bestimmteres nicht anzugeben, weil sie ihre obige Entstehung einer Multiplicirung durch $e - 1$ dergestalt zu verdanken hat, daſs man schon

bei jener Entstehung durchaus nichts anders als $S = \frac{0}{0}$ würde erzeugt haben, wenn man dort schon durch $e - 1 = 0$ multiplicirt hätte.

§. 3. Da es bei dieser Formel vor Augen liegt, daſs sich ihr $e^n - 1$ durch $e - 1$ muſs dividiren lassen, so muſs man sie dadurch des Factors $e - 1$, durch welchen ihre Unbestimmtheit für $e = 1$ veranlaſst wird, allerdings entledigen können. Man würde dadurch

$$\frac{e^n - 1}{e - 1} = e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots\ldots + 1$$

also $S = a(e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots + 1)$ finden, welches nun auch für $e = 1$ den Werth $S = a(1 + 1 + 1 \ldots + 1) = a.n.1$ ganz bestimmt angibt.

§. 4. Indessen sehen wir uns hierdurch 1) wiederum auf den Ausdruck $S = a(1 + e + e^2 \ldots + e^{n-1})$ zurück geworfen, statt dessen wir doch eine zur Berechnung der Summe bequemere Formel gesucht hatten; ferner ist 2) die Division etwas mühsam. In dieser letzten Hinsicht würden wir daher schon nach dem vorigen Capitel die Differentialquotienten zur Ersparung der mühsamen Division benutzen, wie wir es auch dort in §. 5. schon ausgeführt haben. Dann werden wir nicht erst wieder auf die erste Reihe für S zurückgeworfen, sondern wir erhalten sogleich ihren Werth für $e = 1$, um welchen es uns nur zu thun ist.

Da es aber 3) gar häufig der Fall seyn wird, daſs uns der Factor, durch welchen dergleichen Unbestimmtheit veranlaſst wird, noch gar nicht bekannt ist, auch wohl deren mehre im Zähler und Nenner der gebrochenen Function vorkommen können: so wird es rathsam seyn, die hier eintretende Benutzung der Differentialquotienten auf andere Weise darzulegen.

§. 5. In einem vorgegebnen $\frac{Z}{N}$ sey sowohl Z als N eine Function von x. Nicht nur, wenn für $x = a$ die $\frac{Z}{N}$ ein solches $= \frac{A}{B}$ angibt, in welchem A und B endliche Gröſsen sind, sondern auch wenn sie $= \frac{o}{B}$ $= o$ oder $= \frac{A}{o} = A.\infty$ angibt: so wären diese Werthe völlig bestimmt.

Wenn aber für $x = a$ ein $\frac{Z}{N} = \frac{o}{o}$ sich ergibt: so entsteht die Frage nach dem Werthe dieses $\frac{o}{o}$, welches für uns durchaus nichts bestimmend seyn und bleiben würde, wenn wir von diesen Nullen nichts weiteres erfahren könnten, als daſs jede für sich genommen ein Nichts sey. (Eines noch andern unbestimmten Werthes $= \frac{\infty}{\infty}$, werden wir nachher besonders erwähnen.)

§. 6. Da wir aber schon wissen, wie wir für die genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$; $\frac{ddX}{dxdx}$; $\frac{d^3X}{dx^3}$ und s. w., obgleich sie ebenfalls $= \frac{o}{o}$ geworden sind, und geworden seyn müssen, durch ein gehöriges Verfahren, mit einer stetigen Befriedigung auf ihre bestimmten Werthe zu schlieſsen vermögen: so werden wir die Erwartung fassen, vielleicht durch eben diese Methode auch für jedes $\frac{Z}{N} = \frac{o}{o}$ das Ziel zu erreichen, dessen Zähler und Nenner wir zu differenziiren wissen.

Einige der gröſsten und berühmtesten Lehrer, wie Euler, Lagrange und Lacroix haben es für

wesentlich unmöglich erklärt, vermittelst der gewöhnlichen Differentialien (oder Fonctions derivées) den bestimmten Werth z. B. der Function $\frac{(x-a)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$ für $x=a$ zu finden; weil man hier vermittelst der ersten Differentialien, wiederum ein $=\frac{0}{0}$, durch die zweiten und alle höheren aber immerfort ein $=\frac{\infty}{\infty}$ erhält, welches eben so unbestimmt als $\frac{0}{0}$ ist. Andere derselben, wie Karsten, Kästner, Pasquich haben ein Verfahren angerathen, welches sogleich bei dem so eben angeführten leichten Beispiele in einem Cirkel umher führen würde.

Obgleich ich einen Lehrsatz würde aufzustellen wissen, der uns allgemeine Hülfe leisten könnte: so halte ich doch für rathsamer, dafs wir uns die sämmtlichen Fälle der Untersuchung in zwei Klassen zertheilt vorstellen.

Lehrsatz.

§. 7. Wenn Z und N Functionen des x sind, welche $\frac{Z}{N}=\frac{0}{0}$ geben für $x=a$; so mufs I) entweder 1) $\frac{dZ:dx}{dN:dx}$ oder 2) $\frac{ddZ:dx^2}{ddN:dx^2}$ oder 3) $\frac{d^3Z:dx^3}{d^3N:dx^3}$ und s. w., in diesen Ausdrücken jedes $x=a$ gesetzt, die Werthe jenes $\frac{0}{0}$ bestimmend seyn, je nachdem entweder nur **einer** oder nur 2, oder nur 3, u. s. w. solche Factoren, welche durch $x=a$ sich vernullen, **sowohl** im Zähler Z **als** im Nenner N stecken, obgleich übrigens bald Z bald N dergleichen Factor noch öfter enthalten mag.

Sollte aber II) durch dieses Verfahren jedes $\frac{{}^r dZ : dx^r}{{}^r dN : dx^r}$ für $x = a$ fernerhin $= \frac{o}{o}$ oder $= \frac{\infty}{\infty}$ sich ergeben, so würden wir den bestimmten Werth dieses $\frac{o}{o}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ebenfalls vermittelst der gewöhnlichen Differentialquotienten durch den bestimmten Werth der Stammgröſse zu finden wissen.

Beweis für I.

§ 8. Wenn Z und N keine andere als rationale und ganze Functionen des x sind, so kann aus ihrer Vernullung durch $x = a$ gefolgert werden, daſs $Z = Z'(x - a)$, und $N = N'(x - a)$ seyn, nämlich Z sowohl als N, den Factor $(x - a)$ wenigstens einmal enthalten muſs; indem $Z' = \frac{Z}{x - a}$, und $N' = \frac{N}{x - a}$ bedeutend, auch diese Z' und N' wiederum keine andere als rationale und ganze Functionen des x seyn können, falls sie überhaupt noch x enthaltend sind.

1) Aus $Z = Z'.(x - a)$ folgt der Differentialquotient $\frac{dZ}{dx} = Z' + (x - a)\frac{dZ'}{dx}$ für alle Werthe des veränderlichen x, also auch $\underset{x=a}{\frac{dZ}{dx}} = \underset{x=a}{Z'} + \underset{x=a}{(x - a).\frac{dZ'}{dx}}$ für den einzelnen Werth $x = a$.

Da nun $x - a = o$ seyn muſs für $x = a$, und auch $o.\frac{dZ'}{dx} = o$ seyn muſs, weil der Differentialquotient einer rationalen und ganzen Function Z' für keinen Werth a seines x etwas unendlich Groſses geben kann,

falls nicht a selbst $= \infty$ gegeben wird: so hat man $\overset{x=a}{\frac{dZ}{dx}} = \overset{x=a}{Z'}$. Und da sich auf dieselbe Weise auch $\overset{x=a}{\frac{dN}{dx}} = \overset{x=a}{N'}$ ergiebt: so haben wir

$\overset{x=a}{\left(\frac{dZ:dx}{dN:dx}\right)} = \overset{x=a}{\left(\frac{Z'}{N'}\right)}$; welches nun, da es

$= \overset{x=a}{\left(\frac{Z:(x-a)}{N:(x-a)}\right)}$ ist, einen bestimmten Werth des

$\overset{x=a}{\frac{Z}{N}}$ ergeben muſs, falls nicht

2) Z sowohl als N den Factor $x-a$ wenigstens 2 mal enthält. In diesem Falle haben wir

$Z = Z''(x-a)^2$ und $N = N''(x-a)^2$

also $\frac{dZ}{dx} = Z''.\, 2(x-a) + (x-a)^2 \frac{dZ''}{dx}$

$\frac{ddZ}{dx^2} = 2Z'' + 4(x-a)\frac{dZ''}{dx} + (x-a)^2.\, \frac{ddZ''}{dx^2}$

also $\overset{x=a}{\left(\frac{ddZ}{dx^2}\right)} = \overset{x=a}{2Z''}$; eben so auch $\overset{x=a}{\left(\frac{ddN}{dx^2}\right)} = \overset{x=a}{2N''}$

also $\overset{x=a}{\left(\frac{ddZ:dx^2}{ddN:dx^2}\right)} = \overset{x=a}{\left(\frac{Z''}{N''}\right)}$, welches nun da

$Z'' = \frac{Z}{(x-a)^2}$ und $N'' = \frac{N}{(x-a)^2}$ ist, einen bestimmten

Werth für $\overset{x=a}{\left(\frac{Z}{N}\right)}$ geben muſs; es sey denn, daſs

3) Z sowohl als N den Factor $x-a$ wenigstens 3 mal enthält. In diesem Falle aber können wir $Z = Z'''(x-a)^3$ und $N = N'''(x-a)^3$ ansetzen; wodurch sich ergibt, daſs nunmehr nicht nur die ersten,

sondern auch die zweiten Differentialquotienten für $x = a$ sich durchaus vernullen müssen. Die dritten aber geben uns

$$\left(\frac{d^3Z:dx^3}{d^3N:dx^3}\right)^{x=a} = \left(\frac{Z'''}{N'''}\right)^{x=a}$$ welches nun, da $Z''' = \frac{Z}{(x-a)^3}$ und $N''' = \frac{N}{(x-a)^3}$ ist, einen bestimmten Werth geben mufs, es sey denn, dafs sowohl Z als N den Factor $x - a$ wenigstens 4mal enthalten, in welchem Falle wir wiederum $= \frac{o}{o}$ erhalten, und dasselbe Verfahren fernerhin fortsetzen müfsten.

Anmerkung 1.

§. 9. Bei der Anwendung auf die folgenden Beispiele ergiebt es sich von selbst, dafs man nicht im voraus darüber gewifs zu seyn braucht, ob man $x-a$, oder $(x-a)^2$, oder $(x-a)^3$ und s. w. als gemeinschaftlichen Factor des Z und N vorauszusetzen habe: sondern man findet, darum unbekümmert, zuvörderst die ersten Differentialquotienten; und wenn diese wiederum $= \frac{o}{o}$ für $x = a$ geben, so findet man die zweiten, u.s.w. bis man nicht ferner $= \frac{o}{o}$, sondern entweder $= \frac{A}{B}$ oder $= \frac{o}{B} = o$ oder $= \frac{A}{o} = \infty$ findet, welches letztere auch ein bestimmter Werth ist (§. 5). Ein $= \frac{\infty}{\infty}$ kann sich für den hier nur erwiesenen Theil des Lehrsatzes, bei welchem nämlich Z und N keine andere als ganze rationale Functionen des x sind, niemals ergeben.

Anmerkung 2.

§. 10. Nicht nur für alle hier folgenden Beispiele, sondern auch für den ganzen Lehrsatz hätte ich freilich statt $\frac{dZ:dx}{dN:dx}$ auch $\frac{dZ}{dN}$, statt $\frac{ddZ:dx^2}{ddN:dx^2}$ auch $\frac{ddZ}{ddN}$ schreiben können, ohne dadurch eigentlich unrichtig zu werden; indessen ist es rathsamer, auch hier an die Differentialquotienten sich deutlich zu halten; wie es auch aus unserer Ansicht des Verfahrens am Ende dieses Capitels sich ergeben wird.

Beispiele für I) des Lehrsatzes §. 7.

§. 11. I) $\frac{Z}{N} = \frac{x^6 - x^8}{2x^4 - 2}$ gibt $= \frac{0}{0}$ für $x = 1$; man verlangt den Werth dieses $\frac{0}{0}$ zu bestimmen.

Da $\frac{dZ:dx}{dN:dx} = \frac{6x^4 - 3x^2}{8x^3}$ ist, also auch

$\left(\frac{dZ:dx}{dN:dx}\right)^{x=1} = \frac{6-3}{8} = \frac{1}{4}$ seyn muſs, und dieses ein bestimmter Werth ist: so ist das Verlangte hiemit gefunden. Zugleich ersieht man aus diesem $= \frac{1}{4}$, daſs das angegebene $\frac{Z}{N}$ den Factor $x - 1$ nur einmal im Zähler und Nenner enthält.

II. $\frac{Z}{N} = \frac{x^6 - 2x^3 + 1}{3x^4 - 3}$ gibt $= \frac{0}{0}$ für $x = 1$, und $\frac{dZ:dx}{dN:dx} = \frac{6x^5 - 6x^2}{12x^3}$.

Da nun $\left(\frac{dZ:dx}{dN:dx}\right)^{x=1} = \frac{0}{12}$ gibt: so ist dies wiederum sogleich ein sehr bestimmter Werth $= 0$. Das o

des Zählers beweiset übrigens dass Z den Factor x—1 wenigstens 2 mal enthält.

III. $\frac{Z}{N} = \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$ gibt $= \frac{0}{0}$ für $x = 1$.

Da nun auch $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{4x^3 - 4x}$ wiederum $= \frac{0}{0}$ gibt für $x = 1$, so ist dadurch schon gewiss, dass der Factor $x - 1$ im Z und N wenigstens 2 mal steckt.

Da aber $\frac{ddZ : dx^2}{ddN : dx^2} = \frac{20x^3 - 12x^2 - 12x + 4}{12x - 4}$ uns $= \frac{0}{8}$ gibt, für $x = 1$: so haben wir hiemit das obige $\frac{0}{0} = \frac{0}{8}$, also ganz bestimmt $= 0$ gefunden.

Anmerkung.

§. 12. Aus dem in §. 8. von mir angegebenen Beweise folgt eigentlich:

$$\overset{x=a}{\left(\frac{dZ : dx}{dN : dx}\right)} = \overset{x=a}{\left(\frac{1 \cdot Z'}{1 \cdot N'}\right)} \text{ ferner } \overset{x=a}{\frac{ddZ : dx^2}{ddN : dx^2}} = \overset{x=a}{\frac{1 \cdot 2 \cdot Z''}{1 \cdot 2 \cdot N''}},$$

auch, den Beweisgang ferner verfolgt:

$$\overset{x=a}{\frac{d^3 Z : dx^3}{d^3 N : dx^3}} = \overset{x=a}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3\, Z'''}{1 \cdot 2 \cdot 3\, N'''}},$$ u. s. w. Begreiflich können nicht nur die Factoren 1 . 2 oder 1 . 2 . 3. u. s. w. weggelassen werden, wo sie im Zähler und Nenner vorkommen; sondern auch bei der einzelnen Vergleichung $\overset{x=a}{ddZ : dx^2} = \overset{x=a}{1 \cdot 2 \cdot Z''}$ würde man noch

größenrichtig $\underset{x=a}{=} Z'$ schreiben können, wenn sich $\underset{x=a}{Z''} = 0$ ergibt; wie es bei dem Z des voriges IIIten Beispieles, $a = 1$ gesetzt, noch der Fall ist. Da sich aber bei diesem Z das $d^3Z : dx^3 = 60x^2 - 24x - 12$, für $x = 1$ nicht mehr $= 0$ sondern $= 24$ ergibt, so wird man hier $\underset{x=1}{d^3Z : dx^3} = 2 . 3 . \underset{x=1}{Z'''}$ schreiben, die Factoren 2 . 3 beibehalten müssen. In der That ist $Z''' = \frac{Z}{(x-1)^3} = x^2 + 2x + 1$, für $x = 1$ gesetzt, grade $= 4$, und $6 . 4 = 24$.

Durch diese Bemerkung wird ein neues Licht über diesen Gebrauch der Differentialquotienten zur Bestimmung der $\frac{0}{0}$ verbreitet; und überdies hielt ich für nöthig sie hier aufzustellen, damit die im XVIII. Capitel §. 4. eingeschaltete Bemerkung ja nicht über den e r s t e n Differentialquotienten hinaus verstanden werde.

Fernere Beispiele.

§. 13. IV.

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1} \text{ gibt } = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1,$$

$$\frac{dP : dx}{dQ : dx} = \frac{4x^3 - 4x}{5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1} \text{ wiederum} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1,$$

$$\frac{ddP : dx^2}{ddQ : dx^2} = \frac{12x^2 - 4}{20x^3 - 12x^2 - 12x + 4} \text{ aber giebt} = \frac{8}{0} \text{ für } x = 1;$$

und diese $\frac{8}{0} = \infty$ ist eben so gut ein völlig bestimmter Werth, als der umgekehrte $\frac{0}{8} = 0$, im vorigen Beispiele, es war.

Absichtlich habe ich dieses $\frac{P}{Q}$ dem $\frac{Z}{N}$ im vorigen Beispiele umgekehrt gleich, nämlich $\frac{Z}{N} = \frac{Q}{P}$ gegeben. Sobald man zugibt, dafs $\left(\frac{Q}{P}\right)^{x=1} = \left(\frac{Z}{N}\right)^{x=1} = \frac{o}{8}$ ein völlig bestimmter Werth ist, weil $\frac{o}{8} = o$ ein sehr bestimmtes, völliges Nichts ist: so mufs man auch zugeben, dafs $\frac{P}{Q}^{x=1} = \frac{8}{o}$ ein **bestimmtes, völliges** ∞ seyn mufs. Und wer es bedenklich findet, von einer **unendlichen** Gröfse zu behaupten, dafs sie eine vollendete Gröfse erreicht haben solle, dem mufs man doch wohl rathen, nicht die Sache selbst, sondern das Wort, den wörtlichen Widerspruch im Ausdrucke zu verwerfen, und ein solches vollendetes ∞ etwa nach Voreinnerung VII. §. 6. ein **Vollgrofs** zu nennen. Wenn wir die Sache verwerfen wollten, so würden wir für das noch werdende Unendlichgrofse ∞, keine letzte Gränze haben, die der $= o$, als letzter Gränze des Unendlichkleinen entsprechend wäre.

V. Die bekannte Formel $S = a \frac{e^n - 1}{e - 1}$ für die Summe jeder geometrischen Reihe (§. 1.) gibt das unbestimmte $= a \frac{o}{o} = \frac{o}{o}$ für $e = 1$, wenn man e plötzlich $= 1$ setzt. Wird dagegen dieses e als eine veränderliche Gröfse behandelt, der man ein Differential beilegt, welches dann unendlich klein werdend, allmählig $= e + o = e$ werdend und geworden gedacht wird: so findet man $\frac{dS}{de} = a \frac{n e^{n-1}}{1}$ für jedes

o; daher auch für e = 1 seyn muſs $\frac{dS}{de}^{e=1} = a. \frac{n.1}{1} = an,$ wodurch hier wiederum nach obigem ersten Beweise, der bestimmte Werth des $\frac{0}{0}$ gefunden ist.

Allerdings konnte eben dasselbe für dieses Beispiel schon durch die im vorigen Capitel gelehrte Divisionsersparung gefunden werden, weil hier der Factor e — 1, durch welchen die Unbestimmtheit entsteht, den ganzen Nenner im vorgegebenen $\frac{Z}{N} = \frac{a e^n - a}{e - 1}$ ausmacht,

VI. $\frac{Z}{N} = \frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$ gibt $= \frac{0}{0}$ für x = a.

Man findet $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{a\sqrt{a}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x}{-\sqrt{a}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$ also = 3a für x = a; und dieses 3a gibt nun allerdings den Werth des obigen $\frac{0}{0}$ richtig an; wie wir ihn auch schon (Cap. III. §. 2.) durch richtige elementarische Behandlung (von der gewöhnlichen abweichend) gefunden haben.

Anmerkung.

§. 14. Das Verfahren des Lehrsatzes I. ist auch für dieses letzte Beispiel zutreffend, ohne durch den obigen Beweis §. 8. dafür dargethan zu seyn. Denn da wir hier kein durchaus rationales Z und N haben, so können wir aus deren Vernullung durch x = a nicht folgern, daſs Z und N grade den Factor (x — a) wenigstens einmal in sich haben müssen. In der That ist, wie wir schon aus III. §. 2. es wissen können, nicht (x — a), sondern ($\sqrt{x}$ — $\sqrt{a}$) der Fac-

tor, durch dessen Vernullung die Vernullung des Z und N bewirkt wird.

Allerdings ist dieses Beispiel von der Art, daſs es dem obigen Beweise leicht kann unterworfen werden. Denn da das irrationale $\sqrt{x}$ in der Aufgabe keinen zweideutigen Werth haben kann und soll, weil ja nur bei dessen bejahtem Werthe sich das obige $= \frac{0}{0}$ ergibt: so kann man es als eine einfache veränderliche Gröſse $u = + \sqrt{x}$ ansetzen, wodurch man $\frac{Z}{N} = \frac{a\sqrt{a}.u - u^4}{a - \sqrt{a}.u}$ allerdings $= \frac{0}{0}$ für $u = + \sqrt{a}$ erhält, da dann die Schlüsse

$$\overset{u=a}{\left(\frac{dZ : du}{dN : du}\right)} = \overset{u=a}{\frac{a\sqrt{a} - 4u^3}{-\sqrt{a}}}, \text{ also} = \frac{a\sqrt{a} - 4a\sqrt{a}}{-\sqrt{a}} = 3a$$

für $u = a$ dem obigem Beweise gemäſs geben.

Ueberhaupt sollte man bei vorkommenden Irrationalien unterscheiden, ob sie als gegebene oder als gefundene Gröſsen zu betrachten sind. Im ersten Falle muſs z. B. $\sqrt{x}$ entweder als $+ \sqrt{x}$ oder als $- \sqrt{x}$, oder auch als $\mp \sqrt{x}$, also zweimal gegeben seyn. Eben dieses gilt für $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ u. s. w.; und so wird man, wenn die Z und N nur solche Irrationalen des x enthalten, die Aufgabe leicht und richtig rational machen, und dadurch dem obigen Beweise des Lehrsatzes unterwerfen können. Wenn man dagegen, auch wo nicht die sämmtlichen vielfachen Werthe des Irrationalen mit gegeben seyn sollen oder können, sogleich zum allgemeinen Rationalmachen greift: so kann man unrichtig werden, und der Aufgabe und ihrer Auflösung solche Werthe mit aufdringen, die ihr gar nicht zugehörig sind; wie es sogleich an dem Beispiele Vorerinnerung I. zu sehen ist.

Zugleich erhellet aus dieser Bemerkung, dafs es bei der Behandlung des $\frac{Z}{N} = \frac{0}{0}$ nicht sowohl darauf ankommt, ob ein irrationales x in ihr vorkomme, sondern ob der ganze Factor, welcher durch $x = a$ vernullt wird, ein rationaler Factor sey; wie $(\sqrt{x} - \sqrt{a})^1$, auch $(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2$ u. s. w. es ist; dagegen $(\sqrt{x} - \sqrt{a})^{\frac{1}{2}}$ irrational seyn würde, und defshalb eine damit behaftete Aufgabe dem IIten Theile des Lehrsatzes zufallen könnte.

§. 15. *Transcendente Z und N.*

VII. $\frac{Z}{N} = \frac{1 - \sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi - 1}$ gibt $= \frac{0}{0}$ für $\varphi = 90$ Gradbogen.

Man findet $\frac{dZ : d\varphi}{dN : d\varphi} = \frac{-\cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$, welches für $\varphi = 90$ Grad uns $= \frac{-0-1}{+0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$ gibt, und hiemit den Werth des obigen $\frac{0}{0}$ allerdings richtig bestimmt hat.

Wenn wir $\sin\varphi = x$ setzen, folglich $\cos\varphi = \sqrt{(1 . 1 - xx)}$ haben: so erhalten wir $\frac{Z}{N} = \frac{1 - x + \sqrt{(1 . 1 - xx)}}{x - 1 + \sqrt{(1 . 1 - xx)}}$ als algebraischen Ausdruck, der nun auch $= \frac{0}{0}$ sich ergibt für $x = 1$. Wiederum dem Verfahren I. des Lehrsatzes ihn unterworfen, haben wir $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{-1 - (1 . 1 - xx)^{-\frac{1}{2}} . x}{+1 - (1 . 1 - xx)^{-\frac{1}{2}} . x}$, für $x = 1$ also $\frac{Z}{N} = \frac{-1 - \frac{1}{0}}{+1 - \frac{1}{0}} = \frac{-1 . 0 - 1}{+1 . 0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$.

(Man bemerke, dafs wir auch hier nicht nöthig hatten, die endliche Gröfse -1 und $+1$ neben

$-\frac{1}{o}$ verschwinden zu lassen. Vergl. Vorerinnerung VIII).

VIII. $\frac{Z}{N} = \frac{\log x}{\sqrt{(1-x)}}$ ergibt sich $= \frac{o}{o}$ für $x = 1$, und gibt uns $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-2}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-2 . \sqrt{(1-x)}}{x}$, also $= -2\sqrt{o} = \mp o$ für $x = 1$.

$\frac{Z}{N} = \frac{\sqrt{(1-x)}}{\log x}$ würde dagegen für $x = 1$ sich $= \mp \infty$ ergeben.

IX. $\frac{Z}{N} = \frac{a^x - b^x}{x}$ gibt $= \frac{o}{o}$ für $x = o$, und gibt uns $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1}$ (Cap. XII. §. 3)

also $= \log a - \log b$, für $x = o$.

§. 16. Obgleich nun auch bei diesen transscendenten Beispielen das Verfahren I) des Lehrsatzes §. 7. allerdings zum Ziele führt: so müssen wir doch eingestehen, daſs der dortige Beweis desselben (§. 8.) hier nicht eingreifend ist. So gewiſs es allerdings seyn muſs, daſs eine Function des x, welche bei einem gewissen Werthe desselben, bei $x = a$, sich $= o$ ergibt, entweder ein $X . \mathfrak{x}$ oder ein $A . \mathfrak{x}$, oder sogar $1 . \mathfrak{x}$ seyn muſs, dieses $\mathfrak{x}$ einen Factor bedeutend, der für $x = a$ sich vernullt: so würde es doch nicht nur schon bei vielen algebraischen Functionen, sondern noch mehr bei den meisten transscendenten eine mühselige Arbeit ausmachen, diesen Factor sich wirklich darzustellen; daher es schon in dieser Hinsicht rathsam ist, dem obigen Beweise für den Iten Theil des Lehrsatzes einen zweiten Beweis hinzuzufügen, welcher der Erwähnung des vernullenden Factors gar nicht bedarf.

Zweiter Beweis für I. des Lehrsatzes §. 7.

§. 17. Taylors Reihe auf $\overset{(x)}{Z}$ und auf $\overset{(x)}{N}$, das heiſst, auf Z und auf N als Functionen des x angewandt, wissen wir (Cap. XVI. §. 12).

daſs $$\overset{(x+\alpha)}{Z} = \overset{(x)}{Z} + \frac{dZ}{dx}\alpha + \frac{d^2 Z}{2.dx^2}\alpha^2 + \frac{d^3 Z}{2.3.dx^3}\alpha^3 + \ldots\ldots$$

und $$\overset{(x+\alpha)}{N} = \overset{(x)}{N} + \frac{dN}{dx}\alpha + \frac{d^2 N}{2.dx^2}\alpha^2 + \frac{d^3 N}{2.3.dx^3}\alpha^3 + \ldots\ldots$$

seyn muſs für jede beliebig gewählte Gröſse des α, und für jeden Werth des veränderlichen x.

Gibt es nun unter diesen Werthen einen solchen, $x = a$, bei welchem $\overset{(x=a)}{Z}$ und auch $\overset{(x=a)}{N}$ sich $= o$ ergibt: so hat man

$$\overset{(x+\alpha)}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \overset{(x=a)}{\left(\frac{o + \frac{dZ}{dx}\alpha + \frac{d^2 Z}{2.dx^2}\alpha^2 + \frac{d^3 Z}{2.3.dx^3} + \ldots\ldots}{o + \frac{dN}{dx}\alpha + \frac{d^2 N}{2.dx^2}\alpha^2 + \frac{d^3 N}{2.3.dx^3} + \ldots\ldots}\right)}$$

also, da man nunmehr durch α im Zähler und Nenner dividiren kann,

$$\text{auch} = \overset{x=a}{\left(\frac{\frac{dZ}{dx} + \frac{d^2 Z}{2.dx^2}\alpha + \frac{d^3 Z}{2.3.dx^3}\alpha^2 + \ldots}{\frac{dN}{dx} + \frac{d^2 N}{2.dx^2}\alpha + \frac{d^3 N}{2.3.dx^3}\alpha^2 + \ldots}\right)}$$

folglich, nunmehr $\alpha = o$ gesetzt $\overset{(x=a)}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \overset{(x=a)}{\left(\frac{dZ : dx}{dN : dx}\right)}$, und es ist hiemit der Behauptung I) des Lehrsatzes gemäſs der bestimmte Werth des $\overset{(x=a)}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \frac{o}{o}$ erwie-

sen, wenn er nicht wiederum $= \frac{0}{0}$ ergibt, oder auch etwa $= \frac{\infty}{\infty}$, welches eben so unbestimmend seyn würde.

Wenn sich nun $\overset{(x=a)}{\frac{dZ}{dx}} = 0$ und $\overset{(x=a)}{\frac{dN}{dx}} = 0$ ergibt: so weiſs man, daſs in der obigen letzten Gleichung für $\overset{(x=a)}{\frac{dZ}{dx}}$ das **erste** Glied ihrer rechten Seite sowohl im Zähler als im Nenner sich vernullt hat, also der ganze übrige Zähler und Nenner durch α kann dividirt werden; wodurch sich dann, nunmehr $\alpha = 0$ gesetzt, einleuchtend $\overset{(x=a)}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \overset{(x=a)}{\left(\frac{ddZ : dx^2}{ddN : dx^2}\right)}$ ergibt.

Eben so würde man, falls auch dieses wiederum $= \frac{0}{0}$ geben sollte, ferner auf $\overset{(x=a)}{\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{d^3Z : dx^3}{d^3N : dx^3}}$ zu schlieſsen haben; und so weiter, falls auch diese dritten Quotienten wiederum $= \frac{0}{0}$ geben sollten, und nicht etwa, welches leicht zu beurtheilen seyn wird, voraus zu sehen ist, daſs man, auf diese Weise fortgehend, niemals etwas anders als $= \frac{0}{0}$, oder auch ein eben so unbestimmendes $= \frac{\infty}{\infty}$ finden würde.

Zusatz 1.

§. 18. Wenn man nun, es sey im Verfolg de obigen Methode, oder auch durch irgend einen an dern Calcul, auf ein $\left(\frac{Z}{N}\right)^{(x=a)} = \frac{\infty}{\infty}$ gekommen ist: so wird von den gröfsten Lehrern angerathen zu beden ken, dafs $\frac{Z}{N} = \frac{1 : N}{1 : Z}$, und dieser letzte Ausdruck für $x = a$ sich $= \frac{1 : \infty}{1 : \infty} = \frac{0}{0}$ ergebend, der obigen Methode unterworfen sey!

Dieser Bemerkung glaubten z. B. für $\frac{Z}{N} = \frac{x^n}{\log x}$ welches für $x = \infty$ sich $= \frac{\infty}{\infty}$ ergibt, Euler *) und mit etwas verändertem Calcul auch Kästner **) es verdanken zu müssen, dafs sich dieses $\frac{\infty}{\infty} = \infty$ bestimmen lasse.

Beide hielten überdiefs die Substitution $x = \frac{1}{y}$ für nöthig, welche $x = \infty$ durch $y = 0$ gibt. Aber wenn man in dem vorgegebenen $\frac{Z}{N} = \frac{x^n}{\log x}$ umittelbar $x = \frac{1}{y}$ setzt: so hat man

$\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{- ny^{-n-1}}{- 1 : y} = \frac{n}{y^n}$, also für $y = 0$ das Unendlichgrofse $\frac{n}{0^n}$, wie es Euler und Kästner ge-

*) Instit. Calc. differ. L. II. §. 361.

**) Analysis des Unendlichen. 1799. S. 433. §. 381.

funden haben, woraus schon abzunehmen ist, daſs die Umänderung des $\frac{Z}{N}$ in $\frac{1 : N}{1 : Z}$ ganz unnöthig war.

Zusatz 2.

§. 19. Von wesentlichem Nutzen ist es dagegen, aus der Bemerkung, daſs jedes $\left(\frac{Z}{N}\right)^{x=a} = \frac{\infty}{\infty}$ auch $= \left(\frac{1 : N}{1 : Z}\right)^{(x=a)} = \frac{o}{o}$ seyn muſs, zu folgern, daſs man jedes solches $= \frac{\infty}{\infty}$ eben so gut als jedes $\frac{o}{o}$, der obigen Methode des Lehrsatzes vermittelst der Differentialquotienten zu unterwerfen berechtigt ist.

Für das eben erwähnte Beispiel $\frac{Z}{N} = \frac{x^n}{\log x}$ erhalten wir $\frac{dZ : dx}{dN : dx} = \frac{nx^{n-1}}{1 : x} = nx^n$, also $= n\,\infty^n$ für $x = \infty$.

Hiermit haben wir dieses richtige Resultat ohne Umwege erhalten, von denen der eine bei Euler, das Rationalmachen, gar leicht ins Unrichtige hätte führen können.

Einleitung zum IIten Theile des Lehrsatzes §. 7.

§. 20. Wenn nun aber ein $\frac{Z}{N}$ von der Art ist, daſs für $x = a$ allemal $\frac{d^r Z : dx^r}{d^r N : dx^r}$ entweder $= \frac{o}{o}$ oder $= \frac{\infty}{\infty}$ sich ergibt; so würde man durch den Iten Theil des Lehrsatzes nicht zum Ziele kommen.

Sey $\frac{Z}{N} = \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}}$, und die Stammgröfse X im Zähler, desgleichen $\mathfrak{X}$ im Nenner, eine x-Function, welche für x = a sich vernullt: so wird der rte Differentialquotient des Zählers einen Factor $X^{\frac{m}{n}-r}$ haben der für x = a sich entweder = 0 oder = $\frac{1}{0}$ ergeben mufs, je nachdem die ganze Zahl r noch kleiner oder schon gröfser als der gebrochene Exponent $\frac{m}{n}$ ist.

Eben so wird im rten Differentialquotienten des Nenners der Factor $\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}-r}$ für x = a entweder = 0 oder = $\frac{1}{0}$ = ∞ sich ergeben müssen, je nachdem dasselbe r noch kleiner, oder schon gröfser als der gebrochene Exponent $\frac{s}{t}$ ist.

Dieser beiden Factoren wegen wird sich daher ein solches $\left(\frac{Z}{N}\right)^{(x=a)}$ immerfort entweder = $\frac{0}{0}$ oder = $\frac{\infty}{\infty}$ nur dann ergeben, wenn die beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{s}{t}$ zwischen einerlei ganze Zahlen r und r + 1 fallend sind.

Denn wo dieses Einerlei nicht Statt findet, da wird, je nachdem erstens $\frac{m}{n}$ oder zweitens $\frac{s}{t}$ der kleinere Bruch ist,

erstens jener Factor im Zähler schon = ∞ sich ergeben, indefs jener Factor im Nenner noch = 0 bleibt, oder zweitens jener Factor im Nenner

schon $= \infty$ sich ergeben, indefs jener Factor des Zählers noch $= o$ bleibt, mufs demnach, so weit es von diesen Factoren abhängt, das $\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{o}{o}$ im ersten Falle den bestimmten Werth $\frac{\infty}{o} = \infty$, und im zweiten Falle den bestimmten Werth $\frac{o}{\infty} = o$ haben.

Beweis für den IIten Theil des Lehrsatzes §. 7.

§. 21. Lediglich also, wo das erwähnte Einerlei vorhanden, nämlich im vorgegebnen $\frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}}$, sowohl der Exponent $\frac{m}{n}$, als der Exponent $\frac{s}{t}$, gröfser als die Zahl r, und kleiner als die nächste ganze Zahl $r + 1$ ist, kann sich der Umstand ereignen, dafs man bis zum rten Differentialquotienten hin immerfort ein $= \frac{o}{o}$, vom $(r + 1)$ten Differentialquotienten an aber immerfort ein $= \frac{\infty}{\infty}$ erhält.

Wiederum finden nun hiebei die drei Fälle Statt, 1) dafs $\frac{m}{n} = \frac{s}{t}$ oder 2) dafs $\frac{m}{n} < \frac{s}{t}$ oder 3) dafs $\frac{m}{n} > \frac{s}{t}$ seyn mufs.

In jedem Falle finde man zuvörderst $\left(\frac{X}{\mathfrak{X}}\right) = \frac{A}{\mathfrak{A}}$, den bestimmten Werth der Stammgröfse für $x = a$. Es mag nun dieser

entweder I) ein $= \frac{o}{\mathfrak{A}} = o$, oder II) ein $= \frac{A}{o} = \infty$, oder III) eine zwischen o und ∞ fallende Gröfse seyn,

so wird im Falle 1) wo $\frac{Z}{N} = \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{X}{\mathfrak{X}}\right)^{\frac{m}{n}}$ ist, auch

$$\left(\frac{Z}{N}\right)^{x=a} = \left(\frac{A}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{m}{n}}$$ seyn müssen.

Im Falle 2) wo $\frac{m}{n} < \frac{s}{t}$ ist, schliefse man, dafs

$$\frac{Z}{N} = \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}} = \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{m}{n}}\,\mathfrak{X}^{\frac{m}{n}-\frac{s}{t}}}, \text{ also } \left(\frac{Z}{N}\right)^{(x=a)} = \left(\frac{A}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{o}$$

seyn mufs.

Im Falle 3) wo $\frac{s}{t} < \frac{m}{n}$ ist, schliefse man, dafs

$$\frac{Z}{N} = \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}} = \frac{X^{\frac{s}{t}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}} \cdot X^{\frac{m}{n}-\frac{s}{t}}, \text{ also } \left(\frac{Z}{N}\right)^{(x=a)} = \left(\frac{A}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{s}{t}} \cdot o$$

seyn mufs.

Im Falle 2) hat man offenbar ein $= \infty$ gefunden, wenn

$\frac{A}{\mathfrak{A}}$ entweder III) zwischen o und ∞ fallend, oder II) selbst schon $= \frac{A}{o} = \infty$ ist.

Im Falle 3) hat man offenbar ein $= \infty$ gefunden, wenn

$\frac{A}{\mathfrak{A}}$ entweder III) zwischen o und ∞ fallend, oder I) selbst schon $= \frac{o}{B} = o$ ist.

Unentschieden dürfte uns freilich im 2ten Falle scheinen, wenn

$\frac{A}{\mathfrak{A}}$ nach I) ein $= \frac{o}{\mathfrak{A}}$ ist, also ein

$= \left(\frac{A}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{o} = o^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{o^{\frac{s}{t} - \frac{m}{n}}}$ sich ergibt,

und ebenfalls im 3ten Falle uns scheinen, wenn

$\frac{A}{\mathfrak{A}}$ nach II) ein $= \frac{A}{o} = \infty$ ist, also ein

$= \left(\frac{A}{o}\right)^{\frac{s}{t}} \cdot o = \infty^{\frac{s}{t}} \cdot o^{\frac{m}{n} - \frac{s}{t}}$ ist.

Aber in jedem dieser beiden Fälle wird man ein $= o$ erhalten, wenn $\frac{m}{n} > \frac{s}{t}$ ist, und dagegen ein $= \infty$ erhalten, wenn $\frac{m}{n} < \frac{s}{t}$ ist; welches auch durch die Betrachtung erhellet, daſs ganz allgemein $\frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}} = \frac{X^{\frac{mt}{sn}}}{\mathfrak{X}^{\frac{sn}{tn}}}$, also auch der bestimmte Wersh dieses Bruches für den einzelen Werthfall $x = a$, in dem dafür bestimmten Werthe des $\sqrt[nt]{\frac{X^{mt}}{\mathfrak{X}^{sn}}}$ bestehen muſs; wo nun mt und sn ganze Zahlen sind, also $\sqrt[nt]{\frac{A}{o}} = \infty$ seyn muſs, wenn $mt < sn$ folglich $\frac{m}{n} < \frac{s}{t}$ ist, und dagegen $\sqrt[nt]{\frac{o}{\mathfrak{A}}} = o$ seyn muſs, wenn $sn < mt$, folglich $\frac{s}{t} < \frac{m}{n}$ ist.

§. 22. **Anmerk.** Obgleich die letztere Methode vermittelst der ganzen Zahlen mt und sn allge-

mein durchgreifend gebraucht werden könnte: so war es doch rathsam, die erste voranzuschicken, weil man durch diese in den meisten Fällen leichter zum Ziele kommt.

Beispiel.

§. 23. $\frac{Z}{N} = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$ ist das einzige Beispiel bei Lacroix, Calc. different. §. 51.

Für $x = a$ erhält man das unbestimmte $\frac{0}{0}$. Da sich aber für $x = a$ auch $\frac{dZ : dx}{dN : dx}$ wiederum $= \frac{0}{0}$, $\frac{ddZ : dx\,dx}{ddN : dx\,dx}$ aber $= \frac{\infty}{\infty}$ sich ergeben würde, und auch alle noch höheren Differentialquotienten auf $x = a$ eingeschränkt, immerfort das unbestimmte $\frac{\infty}{\infty}$ uns einliefern würden: so muſs diese Function dem IIten Theile des Lehrsatzes §. 7. unterworfen werden.

Nach der in §. 21. von uns gegebenen Methode haben wir

$$\overset{x=a}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \overset{x=a}{\left(\frac{x^2 - a^2}{x - a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{A}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{3}{2}};$$ und da nun

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \overset{x=a}{\frac{d(x^2 - a^2) : dx}{d(x - a) : dx}} = \overset{x=a}{\frac{2x dx : dx}{dx : dx}} = \overset{x=a}{2x} = 2a$$ sich

ergibt: so ist hiermit $\overset{a=a}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = (2a)^{\frac{3}{2}}$ gefunden.

Daſs dieses der richtige bestimmte Werth sey, kann bei diesem leichten Beispiele allerdings auch ohne alle Differentialmethode erwiesen werden. Denn

da $\frac{Z}{N} = \left(\frac{x^2 - a^2}{x - a}\right)^{\frac{3}{2}}$ auch $= \left(\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}\right)^{\frac{3}{2}} =$ $(x+a)^{\frac{3}{2}}$ ist, für alle Werthe das x; so muſs auch

$\overset{x=a}{\frac{Z}{N}} = \overset{x=a}{(x+a)^{\frac{3}{2}}} = (2a)^{\frac{3}{2}}$ seyn.

§. 24. *Anmerkung* 1.

Euler, Lagrange, Lacroix, u. s. w. halten in solchen Fällen für nöthig, zu den ersten Gründen der Differentialrechnung, wie sie meynen, aufs neue zurück zu kehren, indem sich hier bei ihnen auch die schon mehrmals von uns gerügte Besorgniſs anschlieſst, daſs das nach den allgemeinen Differenziirungs-Regeln gefundene $dy = pdx$ nicht mehr richtig und brauchbar sey, wo sich für einen oder mehre Werthe des x ein $p = \infty$ ergebe! Umständlich habe ich diese unrichtige Besorgniſs in dem IVten Anhange zu der Abhandlung Formulae radii osculatoris etc. erörtert.

In Vorerinn. IX und Cap. VI denke ich diese Besorgniſs durch solche Gründe gehoben zu haben, welche auch auf transcendente Functionen anwendbar, also auch auf deren unbestimmte $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ anwendbar sind, obgleich man sie als $= \frac{X^{\frac{m}{n}}}{\mathfrak{X}^{\frac{s}{t}}}$ darzustellen nicht wissen möchte.

§. 25. Anmerk. 2. In Hinsicht des Umstandes, daſs die Differentialquotienten eines $X^{\frac{m}{n}}$ ohn Ende fortgehen, weil man vermittelst keiner ganzen Zahl r auf ein $\frac{m}{n} - r = 0$

kommen kann, will ich doch den Gedanken äufsern, dafs dieses anders ausfallen könnte, wenn man nicht blofs 1te, 2te, 3te Differentiale und Differentialquotienten, sondern auch gebrochene zu bearbeiten unternähme; welches ein neues Feld für den Infinetesimal-Calcul, und insbesondere auch für den Integral-Calcul neue Hülfsmittel gewähren dürfte. Wie leicht hätte es nicht, nach den ersten Gründen der Potenzen $xx = x^2$; $xxx = x^3$ u. s. w. scheinen können, dafs der Begriff von Potenzen auf ganze Dignitäten eingeschränkt bleiben müsse; und gleichwohl hat die Erweiterung auf gebrochene Dignitäten die gröfsten Vortheile gewährt, und ist dann hinterher (allerdings ziemlich spät) auch deutlich gerechtfertigt worden.

Zwanzigstes Capitel.

Krümmungsmesser, berührende und küssende Kreise.

§. 1. Sey SMT (Fig. III.) die gerade Linie, von welcher die Curve AMM′ in M berührt war, so wird eben diese ST auch die Tangirende für jeden mit CM durch M beschreibbaren Kreis ausmachen, wenn C in der Normale MN liegt, es mag übrigens MC noch so klein, oder noch so grofs genommen werden. Da jeder von diesen unzählig vielen Kreisen mit der geradlinigen Tangirenden eben sowohl, wie das Curvenelement MM′ den einzigen Punct M gemein hat: so sagt man auch, dafs alle diese Kreise die Curve in M berührend sind.

§. 2. Wenn man nun mehre Kreise mit kleineren und gröfseren Halbmessern CM beschreibt, so ist es in die Augen fallend, dafs die Krümmung der

Kreise schwächer und schwächer wird, je größer die Halbmesser genommen werden, und es Kreise giebt, welche schwächer als das Curvenelement MM′ gekrümmt, andere dagegen, mit kleineren Halbmessern, stärker gekrümmt sind. Da auch dergleichen Kreishalbmesser MC, wie jede gerade Linie, von MC = o an bis ins Unendlichgroße stetig-wachsend gedacht werden kann: so ist es außer allem vernünftigen Zweifel gestellt, daß es eine gewisse MC = r von bestimmter Länge r geben muß, deren Kreis weder stärker noch schwächer als das Element MM′ gekrümmt seyn kann, folglich mit demselben einerlei Krümmung haben muß. (Die Krümmung eines Curvenelementes und eines Kreises mag übrigens seyn, was sie will; daher es hier unnöthig ist, in weitere Erörterungen darüber uns einzulassen.)

§. 3. Lediglich von diesem Kreise sagt man, daß er die Curve in M küssend sey. Sein Halbmesser MC = r heißt dann auch radius osculator, und ist der Krümmungsmesser für die Curve in M, oder, um uns für gewisse schwierige Fälle sogleich genau genug ausgedrückt zu haben, er ist der Krümmungsmesser eines Elementes MM′, und dieses eine Element MM′ wird von dem Kreise mit Gewißheit geküßt; nicht allemal auch ein anderseits gelegenes Element M𝔐′. Denn sollte z. B. von den beiden Elementen MM′ und M𝔐′ nur das eine möglich, das andere unmöglich seyn, so würde auch für des anderen Krümmungsmesser sich eine unmögliche Größe ergeben müssen.

§. 4. So lange wir uns das Curvenelement MM′ noch als einen immerfort kleiner werdenden Curventheil vorstellen, so lange ist es noch ein $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, indem wir uns bis auf aus-

drückliche Gegenerinnerung allemal die Curve durch eine Gleichung zwischen normalen Coordinaten x und y bestimmt denken wollen. Wenn nun diese Gleichung den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$ giebt; so hat man das genaue Differential

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1 + pp}$$

§. 5. Im Kreise ist die Krümmung allenthalben einerlei; muſs also auch im verschwindenden Bogenelemente noch eben so groſs als im endlichen Bogen seyn; daher auch die Krümmungen verschiedener Kreise am geschicktesten sind, die verschiedenen Krümmungen in den Elementen anderer Curven anzugeben. Schon in der Elementargeometrie kann es hinreichend dargethan werden, daſs die Halbmesser zweier Kreise, der Krümmungsstärke umgekehrt proportional sind, folglich die Halbmesser in ihren directen Verhältnissen ein proportionales Maaſs der Krümmungsschwächen ausmachen. Da nun überdies die äuſserste Schwäche der Krümmung, der gänzliche Mangel der Krümmung, in der geraden Linie anschaulicher, als die gröſste Stärke der Krümmung in einem zum Puncte gewordenen Kreise, vor Augen liegt: so scheint es in der That gerathener, die Halbmesser der küssenden Kreise als die proportionalen Maaſse der Krümmungsschwäche in den geküſsten Curvenelementen zu betrachten; wobei es denn so schicklich als bequem ist, im Teutschen sie geradezu Krümmungsmesser zu nennen. Wer indessen dem gewöhnlichen Ausdrucke Krümmungshalbmesser getreu bleiben will, kann dafür anführen, daſs er dem lateinischen, radius curvaturae, entsprechend ist.

Aufgabe.

§. 6. Die absolute Länge des Krümmungsmessers MC = r für das Curvenelement MM′ = ds zu finden, wenn die Curve durch eine Gleichung zwischen normalen Coordinaten AP = x und PM = y gegeben, also auch $p = \frac{dy}{dx}$ im $ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1+pp}$ so gut als gegeben ist.

Auflösung.

§. 7. Es seyen $C\mathfrak{P} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{P}M = \mathfrak{y}$ die normalen Coordinaten für den gesuchten Kreis, dessen constanter Halbmesser CM = r sey: so hat man $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = r^2$, also $\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = -\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}$, auch $\frac{d\mathfrak{y}^2}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{y}^2}$, folglich das Kreiselement $d\mathfrak{s}$ genannt,

$$d\mathfrak{s} = d\mathfrak{x}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}} = d\mathfrak{x}\sqrt{\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}} = \frac{r}{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{x},$$

mufs daher, damit $d\mathfrak{s} = ds$ sey, $\frac{r}{\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{x} = ds$, also $r = \mathfrak{y}\frac{ds}{d\mathfrak{x}}$ seyn.

Wenn wir nun ferner im $d\mathfrak{s} = ds$, das ist, im $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = d\mathfrak{x}\sqrt{1+\frac{d\mathfrak{y}^2}{d\mathfrak{x}^2}}$, die beiden Urdifferentiale dx und $d\mathfrak{x}$ einander gleich genommen fordern; so mufs dann auch $d\mathfrak{y} = dy$ seyn, also, da offenbar $d\mathfrak{s} : d\mathfrak{y} = r : \mathfrak{x}$ ist,

auch $ds : dy = r : \mathfrak{x}$, folglich $\mathfrak{x} = r\frac{dy}{ds}$ seyn, welches nun $d\mathfrak{x} = \frac{ds\, ddy - dy\, dds}{ds^2}\, r$, also

$\frac{ds}{d\mathfrak{x}} = \frac{ds^3}{\mathfrak{r}\,(ds\,ddy - dy\,dds)}$, und somit, wegen $d\mathfrak{x} = dx$ uns $\mathfrak{r} = dx\,\frac{ds^2}{ds\,ddy - dy\,dds}$ gibt.

Zusatz.

§. 9. Nur die sogenannte **absolute**, nicht aucl die zeichenrichtige Gröſse des $\mathfrak{r}$ (kürzer gespro chen, nur die Längengröſse, nicht auch die [al gebraische] Richtungsgröſse des $\mathfrak{r}$) habe ich i dieser Aufgabe zu finden verlangt; daher ich aucl ohne Bedenken in der Aufgabe die MC, in der Auf lösung dagegen die CM als $= \mathfrak{r}$ aufgeführt habe, ob gleich die MC und CM einander entgegen ge richtete Linien, in Hinsicht ihrer Richtung als algebraische Gegengröſsen mir bedeuten. Auch hab ich es unbeachtet gelassen, daſs die C$\mathfrak{P}$ $= \mathfrak{x}$ eine ne gativ gerichtete Linie, ihr regelmäſsiges Differentia $d\mathfrak{x}$ also ebenfalls negativ, das Differential dx in den gezeichneten Elemente dagegen bejaht gerichtet ist Daſs der Bogen $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ als Quadrat wurzel nicht nur bejaht, sondern auch verneint seyı könnte, muſs ebenfalls nicht in Betracht gezogen werden, wo nur von absoluter Gröſse die Red seyn soll.

§. 9. Um der Formel eine einfachere Gestalt zı gewinnen, wollen wir dx constant annehmen, so is

$$ds\,dds = dy\,ddy,\ \text{also}\ dy\,dds = \frac{dy^2}{ds}\,ddy,$$

$$\text{also}\ dx\,\frac{ds^2\,.\,ds}{ds^2\,ddy - dy^2\,.\,ddy} = \frac{ds^3}{dx\,ddy}\ \text{auch}$$

$$= \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx\cdot ddy} = \frac{(1+pp)\,.\,\sqrt{1+p}}{ddy : dx^2}$$

und auch von dieser Form behaupten wir ein wei teres nicht, als daſs sie den Krümmungsmesser ii

Hinsicht seiner Länge richtig angeben muſs, übrigens aber bald bejaht, bald verneint ihn angeben wird, weil ja bei übrigens gleichen Umständen, das Zeichen des $\frac{ddy}{dx^2}$ mit Convexität und Concavität des Bogenelementes sich wechselt.

§. 10. Der Krümmungsmesser ist für die höheren Theorien eine so wichtige Gröſse, daſs man auf mancherlei verschiedenen Wegen, analytisch und synthetisch ihn gesucht hat, und ich vermuthe, daſs man allemal die Formel für ihn, der vorhin von mir gefundenen entgegengesetzt bezeichnet, also dx constant genommen $r = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ gefunden hat; weil man auf das algebraische $\mp$ einige (freilich nicht genügende) Rücksicht zu nehmen pflegt, um auch dem $\mp$ der Formel einige Bestimmung abzugewinnen; welche aber, wie wir es hier sehen werden, sehr unstatthaft ausgefallen ist.

§. 11. Euler und mit ihm Karsten bemerkten, daſs $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als Quadratwurzel bejaht oder verneint seyn könne, und daher bei einem convexen Bogen die verneinte Wurzel zu nehmen sey, damit die Formel $r = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ jedesmal einen bejahten Werth gebe. Eine Bemerkung, die etwas schwierig zu prüfen ist, wenn man bedenkt, daſs die Convexität von der Lage des Bogenelementes allein nicht abhängig ist, auch manche Convexität gerade vom $\frac{ddx}{dy^2}$ in eben der Maaſse abhängig seyn muſs, wie diejenige, welche Euler allein nur vor Augen hatte, vom $\frac{ddy}{dx^2}$ abhängig ist.

§. 12. Etwas besser und einfacher heifst es daher bei einigen neueren Analysten, dafs die Formel $r = -\frac{ds^3}{dy\,ddy}$ für r einen $\frac{\text{bejahten}}{\text{verneinten}}$ Werth gebe, je nachdem der geküfste Bogen $\frac{\text{concav}}{\text{convex}}$ sey; stillschweigend gefordert, dafs das r in dem Zähler der Formel allemal bejaht genommen werde.

Dergleichen kann nun allerdings bisweilen gar wohl gefordert werden, wo man ausdrücklich zugesteht, dafs es blofs um die absolute Gröfse des Formelertrages zu thun seyn solle. Wo man aber dem sich ergebenden $\mp$ eine Bestimmung zuschreibt, da kann jene Forderung der wahrhaften Natur der algebraischen Geometrie sehr entgegen laufend seyn, und dann von dieser jener Zwang uns unversehens dergestalt durchbrochen werden, dafs wir ohne grofse Aufmerksamkeit den Durchbruch gar nicht ahnen, und auch falls wir ihn entdeckt haben, es für unschicklich anerkennen müssen, ihn zurückweisen zu wollen!

Um ein Par Beispiele eines solchen Durchbruches selbst auch an einer durchaus concaven Ellypse vor Augen zu legen, wollen wir folgende Aufgabe vornehmen.

Aufgabe.

§. 13. Vermittelst der gewöhnlichen Formel $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ den Krümmungsmesser r für alle Orte der Kegelschnitte zu finden.

Auflösung.

§. 14. Die Gleichung $yy = bx + nxx$, deren b den Parameter (m. s. Vorerinn. XI) bedeutet, gibt die Ellipse / Hyperbel durch $n = \mp \frac{b}{a}$ wenn $+a$ der Ellipse / $-a$ der Hyperbel Grundaxe bedeutet, deren Anfangspunkt auch den Anfang der Abscissen x ausmacht, denen in ihren Endpuncten die Ordinaten y normal stehen; und die Parabel ergibt sich durch $n = \frac{b}{a} = \frac{b}{\infty} = 0$. Eben so allgemein ist daher auch $2y\,dy = b\,dx + 2n\,x\,dx$, also $\frac{b}{2} = h$ geschrieben, $y\,dy = h\,dx + n\,dx$, folglich $p = \frac{dy}{dx} = \frac{h+nx}{y}$, und $dp = \frac{ddy}{dx} = \frac{yn\,dx - (h+nx)\,dy}{yy}$ also $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{n}{y} - \frac{h+nx}{yy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{n}{y} - \frac{pp}{y}$, und demnach $dx\,ddy = \frac{n-pp}{y}\,dx^3$.

Da nun $ds^3 = dx^3 \,.\, (1+pp)^{\frac{3}{2}}$ ist, so hat man
$$r = -y\,\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{n-pp} = -\frac{[y^2+(h+nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{ny^2-(h+nx)^2} = \frac{[y^2+(h+nx)^2]^{\frac{3}{2}}}{hh}.$$

§. 15. Hiemit liegt es nur allzu gewifs vor Augen, dafs diese Formel für alle Orte der Kegelschnitte den Krümmungsmesser $MC = r$ allemal bejaht anzugeben gezwungen ist, wenn man die vorhin (§. 10) schon aufgeführte Forderung befolgt, die Quadratwurzel, welche im $ds^3 = (dx^2 + dy^2) \,.\, \sqrt{dx^2 + dy^2}$ vorkommt, allemal bejaht zu nehmen.

Diese Forderung aber ist der Natur des algebraischen Calculs, und der demselben angemessenen algebraischen Geometrie, dergestalt entgegen laufend, dafs es dieser wohl verbündeten Wissenschaft hie und da gelingen wird, ihre Rechte unversehens geltend zu

machen; z. B. selbst auch bei einer so einfach hohlen Curve als nach den obigen Gleichungen die Ellipse es ist. Um in der Kürze anschaulich uns ausdrücken zu können, sey der sogenannte Parameter $b = \frac{cc}{a}$, also c die kleine und a die grofse Axe, so ist eben diese a nach obiger Gleichung auch die Abscissenlinie, mufs also nach den gewöhnlichen Begrifen von hohlen und erhabenen Bogen, die Ellipse auch gegen diese Abscissenlinie durchaus hohl genannt werden, und soll demnach die gewöhnliche Formel des Krümmungsmessers den Ausdruck desselben allenthalben bejaht gewähren.

§. 16. Wird nun die in §. 14. für alle Kegelschnitte gefundene Formel des r, durch $n = -\frac{b}{a} = -\frac{2h}{a}$ auf die Ellipse eingeschränkt, so haben wir $r = \frac{\left[y^2 + \left(h - \frac{2hx}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{hh}$.

I) Für alle y = o also $r = \frac{\left(h - 2h\frac{x}{a}\right)^{2 \cdot \frac{3}{2}}}{hh}$ $= \frac{\left(h - 2h\frac{x}{a}\right)^3}{hh}$, welches nun

I) 1) für x = o uns $r = \frac{hhh}{hh} = h$

I) 2) für x = a aber uns $r = \frac{(h - 2h)^3}{hh} = \frac{(-h)^3}{hh}$ $= \frac{-h^3}{hh} = -h$ gibt!

Ist also hiemit für den einen Scheitelpunct im Anfange der grofsen Axe a allerdings der küssende

Halbmesser bejaht, für den andern Scheitelpunct im Endpuncte dieser Axe dagegen der küssende Halbmesser verneint gefunden!

II) Für $x = \frac{a}{2}$ gibt die Formel $r = \frac{y^{2 \cdot \frac{3}{2}}}{hh} = \frac{y^3}{hh}$.

Da hier $y = \frac{c}{2}$ ist, indem c die kleine Axe bedeudet, auch dann der Parameter $b = \frac{cc}{a}$, also $h = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{a}$ seyn mufs, und der Parameter allemal bejaht genommen für die obigen Gleichungen vorausgesetzt wird: so hat man auch $r = \frac{ccc \cdot 2 \cdot 2 \cdot aa}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot cccc} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{c}$,

also II) 1) $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{c}$ bejaht für den obern Scheitelpunct, dessen $y = + \frac{c}{2}$ ist,

aber II) 2) $r = - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{c}$ für den untern Scheitelpunct, der durch $y = - \frac{c}{2}$ bestimmt wird.

Im Iten Falle hat die Algebra den ihr aufgelegten Zwang mit vollem Glücke durchbrochen; gerade denjenigen küssenden Halbmesser, der der bejahten Abscisse, vom geküfsten Scheitel an entgegen gerichtet ist, auch verneint gerichtet angegeben.

Im IIten Falle hat sie doch auch schon angezeigt, dafs die beiden küssenden Halbmesser nicht einander gleich-gerichtet, sondern einander entgegen-gerichtet seyn müssen.

§. 17. Mehre Beispiele des Fehltreffens findet man in der kleinen Schrift: *Formulae radii osculatoris quoad valores earum positivos ac negativos et ventilatae et diligentius, quam fieri solet, explicatae, Dresdae* 1825, von mir aufgeführt, auch das Unstatt-

hafte jener gewöhnlichen Ausdeutung aus allgemeinen Gründen erörtert; wobin denn insbesondere auch meine Erinnerungen gegen die gewöhnliche Abtheilung in convexe und concave Bogen gehört.

Convex und concav pflegen einige Lehrer einen Bogen zu nennen, je nachdem er seine erhabene Seite oder seine hohle Seite der Abscissenlinie zugekehrt hat. Mit Recht wird hier von andern hinzugefügt, dafs man neben jener Convexität und Concavität *versus basin*, auch eine Convexität und Concavität *versus latus* zu beachten habe. Wenn nun das latus, das heifst, die Lage der Ordinaten, der Abscissenlinie nicht rechtwinklich ist: so ist schon dieser Abtheilungsgrund sehr unrein. Aber selbst auch bei orthogonalen Coordinaten hat jede von den hier genannten Abtheilungen in Convexität und Concavität etwas unschickliches in sich; m. s. die eben angeführte Schrift, wo ich auch die schickliche Abtheilung angegeben habe: dafs nämlich ein Bogenelement, von seinem Anfange an ins Ordinaten-+ oder ins Ordinaten-— gerichtet, in Hinsicht der bejahten Ordinaten richtig convex oder concav ist; und dabei jedes von diesen Elementen in Hinsicht der bejahten Abscissenrichtung bald convex bald concav seyn kann.

§. 18. In mehren andern Schriften habe ich dargethan, dafs das algebraische $\mp$, auf Geometrie angewandt, durch Richtung und Gegenrichtung construirt werden müsse, in der Ebne aber mehr als zwei dergleichen Richtungspare nicht angelegt werden können. Bei normalen Coordinaten kommt das eine Richtungspar den Abscissen $\mp x$, das andere, den Ordinaten $\mp y$ zu. Beides sind r e i n e für sich bestehende Richtungspare, die nichts mit einander gemein haben. Keine Abscisse x, sie mag bejaht oder verneint gerichtet seyn, hat irgend etwas von

den ihr normalen Richtungen der $\mp y$ in sich, u. s. w.

Wenn daher, in einem bei B rechtwinklichen Dreiecke ABD (Fig. III, 2). der eine Kathete AB Abscissenrichtung, der andere BD Ordinatenrichtung hat: so muſs man sich bestimmen, ob man die Hypotenuse AD in Hinsicht dessen, was sie von der Abscissenrichtung in sich hat, oder in Hinsicht dessen, was sie an Ordinatenrichtung in sich hat, geschätzt, als bejaht oder verneint gerichtet, beurtheilen wolle oder müsse; wobei es nun offenbar nothwendig ist, zwischen Anfangs- und Endpunct der Linie zu unterscheiden. Jede gerade Linie DA, ist ja der AD entgegen gerichtet, indem uns der zuerst geschriebene Buchstabe allemal den Anfangspunct der Linie bedeuten soll.

In dem noch werdenden Curvendifferential $MM' = \text{'ds} = \sqrt{(\text{'dx}^2 + \text{'dy}^2)}$ ist M der Anfangspunct des 'ds, und 'ds nach Ordinatenrichtung $\begin{smallmatrix}\text{verneint,}\\\text{bejaht,}\end{smallmatrix}$ dem $\begin{smallmatrix}- dy\\+ dy\end{smallmatrix}$ gemäſs, und dagegen eben dasselbe 'ds nach Abscissenrichtung geschätzt, $\begin{smallmatrix}\text{verneint,}\\\text{bejaht,}\end{smallmatrix}$ je nachdem das dx ein $\begin{smallmatrix}- dx\\+ dx\end{smallmatrix}$ ist.

Diese wenigen Sätze aus der von mir seit 25 Jahren nach und nach aufgestellten algebraïschen Geometrie werden schon hinreichend seyn, uns über das $\mp$ des küssenden Halbmessers aufs reine zu bringen, wenn wir die Kreisgleichung anders als vorhin anstellen. Für die obige Anstellung in §. 5. würde ich noch mehre Sätze beibringen müssen.

Aufgabe. (Fig. III, 3.)

§. 19. **Die Gröſse und die Richtung des küssenden Halbmessers MC = r zu finden für jedes Curvenelement MM' = ds, wenn die Curve durch eine Gleichung zwischen normalen Coordinaten AP = x und PM = y bestimmt ist, also** $ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1+pp}$ **sich ergiebt.**

Auflösung.

§. 20. Nicht etwa die CM, sondern die MC = r genannt (vergl. §. 8.), hat man $rr = M\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{P}C^2$, und sieht es vor Augen, daſs diese MC = r etwas verneinte Ordinatenrichtung mit der $M\mathfrak{P}$, und bejahte Abscissenrichtung mit der $\mathfrak{P}C$ gemein hat.

Um statt dieser Kreisgleichung diejenige zu erhalten, in welcher das küssende Kreiselement eben die Coordinaten AP = x und PM = y habe, welche dem geküſsten Element der Curve zugehören, muſs man $M\mathfrak{P}$ durch y, und $\mathfrak{P}C$ durch x auszudrücken suchen. In dieser Hinsicht AE = e, und EC = f genannt, hat man auch $P\mathfrak{P} = f$,
also $M\mathfrak{P} = MP + P\mathfrak{P} = -y + f$
und $\mathfrak{P}C = PE = PA + AE = -x + e$, welches nun die verlangte Kreisgleichung $rr = (f-y)^2 + (e-x)^2$ giebt.

C der Endpunct des küssenden Halbmessers MC = r, ist der Mittelpunkt des küssenden Kreises, und die Lage dieses C gegen A, den Abscissenanfangspunkt, ist durch AE = e, als seine Entfernung nach der Abscissenrichtung, und EC = f als seine

Entfernung nach Ordinatenrichtung bestimmt. Da nun die Lage des C nur mit verändertem Halbmesser MC $=$ r sich ändert, dieser aber für einerlei Ort M der Curve auch seinen bestimmten Endpunkt hat, und als Halbmesser eines Kreises bei Differenziirung seiner veränderlichen Coordinaten als eine constante Gröfse zu behandeln ist: so sind die e und f in dieser Hinsicht constante Gröfsen, und werden, wie r selbst, nur durch Differentialverhältnisse bestimmbar seyn.

Die Kreisgleichung differenziirt, giebt nun $o = -2(f-y)\,dy - 2(e-x)\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{e-x}{y-f}$, das heifst, indem wir y und x als Coordinaten des küssenden Kreises behandeln, so geben sie ihr Differentialverhältnis $= \frac{e-x}{y-f}$; und bestimmen somit, das Kreiselement $d\mathfrak{s}$ genannt, $d\mathfrak{s} = dx\sqrt{1+\left(\frac{e-x}{y-f}\right)^2}$. Das Curvenelement ist dagegen $ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, wenn wir ausbedingen, dafs $\frac{dy}{dx}$ von nun an lediglich das Differentialverhältnifs in der gegebenen Curve bedeuten soll. Damit nun die Curve in M von dem Kreise geküfst werde, mufs $d\mathfrak{s} = ds$ seyn, und hiezu ist weiter nichts erforderlich, als dafs $\frac{e-x}{y-f} = \frac{dy}{dx}$ sey.

Da nach der Zeichnung $ds : dy = r : e-x$ ist; so haben wir $\frac{r}{y-f} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}$, also $r = (y-f)\frac{ds}{dx}$. Die Gleichung differenziirt (weil auch f nur durch Differentialverhältnisse bestimmt werden kann) giebt $o = \frac{ds}{dx} \cdot dy + (y-f) \cdot \frac{dds}{dx}$, wenn dx constant

gefordert wird; daher nun $y - f = - \frac{ds\,dy}{dds}$, und dieses in die Gleichung für $\mathfrak{r}$ gebracht, $\mathfrak{r} = - \frac{dy\,ds^2}{dx\,dds}$; und da $dds = \frac{dy}{ds} \cdot ddy$ ist, so haben wir auch $\mathfrak{r} = - \frac{ds^3}{dx\,ddy}$.

§. 21. Weil nun in dem gezeichneten einzelen Falle, auf welchen der Calcul angelegt wurde, die $MC = + \dot{\mathfrak{r}}$, und dagegen die $MC = - \ddot{\mathfrak{r}}$ war, wenn $\dot{\mathfrak{r}}$ bedeutet, daſs diese Linie MC, nach ihrer Abscissenrichtung geschätzt werden solle, $\ddot{\mathfrak{r}}$ dagegen verlangt, ihrer Ordinatenrichtung gemäſs sie bejaht oder verneint gerichtet zu nehmen: so haben wir nun $\dot{\mathfrak{r}} = - \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ und dagegen $\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$; und beide Ausdrücke müssen sich nun allenthalben, in allen Fällen als vollkommen zeichenrichtig bewähren.

§. 22. Beispiel 1. Für die Parabel $yy = bx$ würden wir nach §. 14 schon $\frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2}$ gefunden haben, wissen also nunmehr, daſs für jeden Ort dieser Curve $\dot{\mathfrak{r}} = \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2}$, und dagegen $\ddot{\mathfrak{r}} = - \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2}$ seyn muſs.

Da in beiden Ausdrücken der quadratische Factor $\frac{y^2 + h^2}{h^2}$ bejaht ist: so haben wir $\dot{\mathfrak{r}} ::: \sqrt{y^2 + h^2}$ und dagegen $\ddot{\mathfrak{r}} ::: - \sqrt{y^2 + h^2}$, das heiſst, $\dot{\mathfrak{r}}$ zeichengleich dem $\sqrt{y^2 + h^2}$, und dagegen $\ddot{\mathfrak{r}}$ zeichengleich dem $- \sqrt{y^2 + h^2}$.

Demnach $\dot{r}$ ::: h, also der Krümmungsmesser MC in Hinsicht seiner Abscissenrichtung durchaus bejaht, weil ja der Kathete h als halber Parameter nach bejahter Abscissenrichtung angelegt ist. Dagegen $\ddot{r}$ ::: — y, also für jedes + y ins Ordinaten-Minus, für jedes — y, ins Ordinaten-Plus gerichtet.

§. 23. Beispiel 2. Für alle Orte in der Ellipse $yy = bx - \frac{b}{a}xx$ haben wir in §. 13. bereits

$$\frac{ds}{-dx\,ddy} = \frac{\left[y^2 + \left(h - \frac{2hx}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{hh}$$

gefunden, und wissen demnach nach §. 21. nunmehr, dafs

$$\dot{r} ::: r\left[y^2 + \left(h - \frac{2hx}{a}\right)^2\right] ::: \left(h - \frac{2hx}{a}\right)$$

seyn mufs; und dieser Kathete ist bejaht gerichtet, wenn $x < \frac{a}{2}$ ist, verneint gerichtet, wenn $x > \frac{a}{2}$ ist. Völlig zutreffend ist nun in der That sowohl bei bejahten als verneinten y, für alle $x < \frac{a}{2}$ der Krümmungsmesser MC den bejahten Abscissen gemäfs gerichtet, und verneinte Abscissenrichtung hat er für alle $x > \frac{a}{2}$.

Ist nun ferner $x = \frac{a}{2}$, so ist der Kathete $h - 2b\frac{x}{a} = 0$, wird demnach hiemit entschieden, dafs die zu $x = \frac{a}{2}$ gehörigen Krümmungsmesser von der Abscissenrichtung gar nichts an sich haben, also lediglich Ordinatenrichtung, reine Ordinatenrichtung haben müssen.

Jede Ordinatenrichtung der MC aber wird durch $\bar{r} ::: -\, r\left[y^2 + \left(h - \frac{2hx}{a}\right)^2\right]$ dergestalt bestimmt, dafs nun die Richtung dieser Hypotenuse dem Katheten y gemäfs zu beurtheilen ist; wird also durch das $-$ der Formel bestimmt, dafs der Krümmungsmesser allemal dem $\mp y$ entgegengesetzte Richtung an sich habe; wiederum vollkommen richtig!

§. 24. Hiemit liegt es nun vor Augen, wie sehr, und wie wesentlich, unsere aus den Gründen der algebraischen Geometrie gefolgerte Ausdeutung des $\mp$ in der Formel des Krümmungsmessers, von der oben erwähnten sonst gewöhnlichen Ausdeutung für sogenannte convexe und concave Bogen verschieden ist. In der §. 17. schon angeführten Schrift ist die ganze Methode umständlicher behandelt, auch namentlich durch ihre Anwendung auf die Curve $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = y$ (Fig. II. 25) ein merkwürdiges Beispiel gegeben, was diese Methode zu leisten vermag; indem wir dafür gefunden haben, dafs die Krümmungsmesser für die Orte dieser Curve von U bis D ins Abscissen $+$ und Ordinaten $-$, von D bis F ins Ordinaten $-$ und Abscissen $-$, von F bis G ins Ordinaten $+$ und Abscissen $+$, von G bis H u. s. w. ins Ordinaten $+$ und Abscissen $-$ gerichtet sind. Man sehe dort Seite 39, §. 44., wo man auch jeden Wechsel in diesen Richtungen genau angegeben und anschaulich erklärt findet.

§. 25. Auch habe ich in jener Schrift mehre Methoden angegeben, wie man sich der richtigen Ausdeutung des $\mp$ noch versichern kann, wenn man auch anfangs nur die Länge desselben zu finden beabsichtigt hatte. In der That wird für unsere Praxis, diese Länge, und dadurch die Gröfse der Krümmung zu kennen, meistens hinreichend seyn. Indes-

sen mag man sich zur Regel machen, für die Anlage des Calculs in Hinsicht des Krümmungsmessers allemal einen solchen Ort M der Curve zu wählen, dessen Krümmungsmesser MC entweder ins Ordinaten-+ und Abscissen-—, oder ins Abscissen-+ und Ordinaten-— gerichtet ist; weil dann allemal die Formel, wie sie sich ergibt, demjenigen Richtungspare zugehört, welches in der Anlage-Zeichnung die bejahte Richtung der MC ist, und die Gegengröſse der gefundenen Formel dem andern Richtungspare zugehört.

§. 26. Wenn man von dem Krümmungsmesser MC zu sagen weiſs, wie er in Hinsicht des Abscissen- und des Ordinaten-∓ gerichtet sey: so ist man eben dadurch über das in M von seinem Kreise geküſste Curvenelement völlig unterrichtet wie es in beider Hinsicht gelegen oder gerichtet seyn müsse; und eben dieses macht den Grund der in §. 17. erwähnten schicklichen Abtheilung aus.

Mag es indessen immerhin der Fall seyn, daſs wir für jede unserer künftigen practischen Anwendungen über dieses alles, ohne Befragung der Formeln, durch den bloſsen Anblick der Curve schon hinreichend gewiſs werden können: so war es doch namentlich auch für die Anfänger in dieser Sache rathsam zu erfahren, daſs die sonst versuchten Auslegungen für Convexität und Concavität unrichtig sind.

Eben so nöthig ist es, die ähnlichen Unrichtigkeiten zu kennen, welche bei polarischen Ordinaten bisher gewöhnlich geworden sind.

Aufgabe.

§. 27. Aus der obigen Formel $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, welche ein

constantes dx voraussetzt, den Ausdruck des r für polarische Ordinaten, radios vectores v abzuleiten.

Auflösung. (Tab. III. Fig. 4.)

Mit PM = v den elementarischen Kreisbogen MN beschrieben, der von der verlängerten PF' in N getroffen wird, nachdem er das Curvenelement ds = MM' in M' getroffen hat, und mit einem beliebigen Halbmesser PA den Kreisbogen AFF' beschrieben, ergibt sich

PF : PM = FF' : MN

d. i. AP : v = AP.$d\varphi$: MN also MN = $vd\varphi$, indem φ den Kreisbogen AF bedeutet.

Da nun in dem verschwindenden Dreiecke MNM' der Winkel bei N zum rechten Winkel wird, auch der Kathete MN, und die Hypotenuse MM' = ds, ihre Krümmung verschwindend haben: so hat man $ds^2 = v^2\, d\varphi^2 + dv^2$, wodurch für den Zähler der gesuchten Formel schon gefunden ist, daſs er $ds^3 = (v^2\, d\varphi^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}$ seyn muſs.

Um nun auch den Nenner $-dx\, ddy$ der gegebnen Formel, durch die v und φ der gesuchten Formel mit möglicher Kürze ausgedrückt zu erhalten, bemerken wir, daſs die gegebne Formel für jeden Bogen der Abscissenlinie und für jeden Anfangspunct der Abscissen gültig ist; daher wir zur sichern Anschaulichkeit voraussetzen können, die Curve, welche durch polarische Ordinaten bestimmt ist, solle, falls man sie durch parallele rechtwinkliche Ordinaten construirt haben wolle, gerade durch PX = x und XM = y abgereicht gedacht werden.

Dann ist $y = v \,.\, \sin\varphi$, also $dy = \sin\varphi\, dv + v \,.\, d\sin\varphi$ und $ddy = \sin\varphi \,.\, ddv + 2 \,.\, dv \,.\, d\sin\varphi + v \,.\, dd\sin\varphi$.

Ferner ist dann $x = v.\cos\varphi$, also $dx = \cos\varphi.dv + v.d\cos\varphi$ und $ddx = \cos\varphi . ddv + 2 . dv . d\cos\varphi + v . dd\cos\varphi$.

Da aber die gegebene Formel ein constantes dx also $ddx = 0$ voraussetzt: so müssen wir für die gleich folgenden Reductionen bemerken, dafs wir

☿) etwa $\cos\varphi . ddv = - 2 dv . d\cos\varphi - v . dd\cos\varphi$

♀) oder $2 dv . d\cos\varphi = - \cos\varphi\, ddv - v . dd\cos\varphi$

zu achten haben.

Um nun $dx\, ddy = (\cos\varphi . dv + v . d\cos\varphi)\, ddy$ zu erhalten, finden wir

1) $\cos\varphi . ddy$

$= [\cos\varphi . \sin\varphi . ddv] + 2 . dv \cos\varphi\, d\sin\varphi + v . \cos\varphi\, dd\sin\varphi$

Hierin statt des eingeklammerten Ausdruckes, zufolge ☿) den Ausdruck $[- 2 dv \sin\varphi d\cos\varphi - v . \sin\varphi\, dd\cos\varphi]$ gesetzt, und die Differentialien $d\sin\varphi$; $dd\sin\varphi$; $d\cos\varphi$ und $dd\cos\varphi$, auf das Bogendifferential $d\varphi$ gebracht, ergiebt sich:

1) $\cos\varphi . ddy = 2 dv (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) d\varphi + v . dd\varphi$

also auch $\cos\varphi\, dv\, ddy = 2 . dv^2\, d\varphi + v . dv\, dd\varphi$.

Es wird dann

2) $d . \cos\varphi\, ddy$

$= \sin\varphi . d\cos\varphi\, ddv + [2\, dv\, d\cos\varphi\, d\sin\varphi] + v . d\cos\varphi\, dd\sin\varphi$

gefunden, und statt des Eingeklammerten, zufolge ♀) den Ausdruck $[- \cos\varphi . ddv . d\sin\varphi - v . dd\cos\varphi . d\sin\varphi]$ gesetzt, und die Differentiale $d\sin\varphi$; $dd\sin\varphi$; $d\cos\varphi$ und $dd\cos\varphi$ auf das Bogendifferential $d\varphi$ gebracht, ergiebt sich:

2) $d . \cos\varphi\, ddy = - d\varphi . ddv + v . d\varphi^3$

also auch $v . d\cos\varphi\, ddy = - v . d\varphi . ddv + v^2 d\varphi^3$.

Hiermit haben wir

$$dx\, ddy = 2 dv^2\, d\varphi + v . dv . dd\varphi + v^2\, d\varphi^3 - v\, d\varphi . ddv,$$

folglich aus der gegebenen Formel $r = \frac{ds^3}{- dx\, ddy}$

die gesuchte $\varrho = \frac{(v^2 d\varphi^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{-2 dv^2 d\varphi - v\, dv\, dd\varphi - v^2 d\varphi^3 + v\, d\varphi\, ddv}$ gefunden.

(Eben dieselbe Formel würden wir auch erhalten haben, wenn wir statt der Substitution ♀) uns der andern ☿) bedient hätten.)

Anmerkung.

§. 29. Um ein ziemliches mühsamer wird die Reduction, wenn man von der Formel $r = \frac{dy\, ddx - dx\, ddy}{ds^3}$ ausgeht, in welcher auch dx veränderlich angenommen ist. Noch neuerlich hat der Hr. Hofr. Mayer (*Vollst. Lehrbegr. der höhern Analysis, Th.* I. §. 100) diese Reduction, und gut geordnet durchgeführt; aber auch von ihm ist, wie es vermuthlich auch bei allen andern Mathematikern bald auf diesem, bald auf jenem Wege sich ergeben hat, die Formel

$$\varrho = \frac{ds^3}{2 dv^2 d\varphi + v \,.\, dv\, dd\varphi + v^2 d\varphi^3 - v \,.\, d\varphi \,.\, ddv}$$

gefunden, also gerade die Gegengröſse der von uns gefundenen.

§. 30. Diese Uebereinstimmung der übrigen Mathematiker rührt daher, daſs einige, auch von den neueren, am angelegentlichsten Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche, ausdrücklich behaupten, jede Formel für einen Krümmungsmesser müsse für jeden convexen und concaven Bogen entgegengesetzt bezeichnet sich ergeben.

Wer nun dieses, mit Vernachlässigung des hier nothwendigen *ceteris paribus* für einen allgemein durchgreifenden algebraischen Gegensatz anerkannt hat, dem kann es freilich leicht widerfahren, mit

dem wahrhaft algebraischen Richtungs-$\mp$, welches für alle $\mp x$ und $\mp y$ zum Grunde liegt, in Widerspruch zu gerathen.

§. 31. In der That wird in allen den Zeichnungen, die ich in dieser Hinsicht nachgesehen habe, jene einzig richtige Grundlage nicht beachtet; z. B. in Klügels Wörterbuch Theil 3. pag. 366 hat sowohl die Fig. 94, auf welche der Calcul angelegt war, um r für eine durch x und y bestimmte Curve zu finden, als auch Fig. 95, nach welcher die Formel des ϱ für polarische Ordinaten gefunden wird, der concave Elementarbogen ds eine solche Lage, dafs sein küssender Halbmesser in beiden Fällen sich bejaht ergeben müfste, wenn man im ersten Fall diesen Halbmesser nach der gewöhnlichen Formel $r = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, bei constanten dx also nach der gewöhnlichen Formel $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$, und im zweiten Falle nach der von uns durch richtige Reduction gefolgerten Formel

$$\varrho = \frac{ds^3}{-2dv^2\,d\varphi - v^2\,d\varphi^3 - v\,dv\,dd\varphi + v\,d\varphi\,ddv}$$

ihn findet, und auch dieses MC $= \varrho$ bei polarischen Ordinaren nach demjenigen ihm zukommenden trigonometrischen $\mp$ beurtheilt, welches dem $\mp x$ des $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ entsprechend ist.

Da aber Hr. Klügel in seiner Fig. 95 den Winkel φ so angelegt hat, dafs dessen $\mp$ v. cos φ gerade mit $\pm x$ einerlei Richtung hat: so mufste seine Reducirung ihm eine Formel geben, welche die Gegengröfse des richtigen ist. Daher wir nun schon aus der Entstehungsart dieser Formel, mit Hülfe der von uns schon mitgetheilten Lehren es vorher sagen

können, dafs die von ihm gefundene gewöhnliche Formel ϱ ein $\ddot{MC} = \ddot{\varrho}$ angeben mufs, also in allen denen, und nur in denen Fällen, wo der küssende Halbmesser MC bejahte Sinusrichtung an sich hat, einen bejahten Werth aussprechen kann, der geküfste Bogen mag convex oder concav seyn.

Beispiel.

§. 30. Man denke sich eine Parabel nach der Gleichung $yy = bx$ construirt, so kann jede Sehne AM (III. Fig. 5), die ihren Anfang im Scheitel A hat, als polarische Ordinate $AM = v$ gebraucht werden. Der Winkel zwischen Axe und Sehne heifse φ, so ist jedes $AP = x = v \,.\, \cos\varphi$ und jedes $PM = y = v \,.\, \sin\varphi$, auch v als absolute Gröfse behandelt, jedes $(\mp)\, x = v\,(\mp) \cos\varphi$ und jedes $(\mp)\, y = v\,(\mp) \sin\varphi$. In den Formeln für den Krümmungsmesser $MC = \varrho$ bei polarischen Ordinaten ist es rathsam und bequem, das Differential $d\varphi$ als constant zu fordern, wodurch also $dd\varphi = 0$, und die im §. 29 erwähnte gewöhnliche Formel der Analysten sich als

$$\varrho = \frac{ds^3}{2\,dv^2\,d\varphi + v^2\,d\varphi^3 - v\,.\,d\varphi\,.\,ddv}$$ ergiebt,

$ds^3 = (v^2\,d\varphi^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}$ bedeutend. (§. 28.)

Von dieser Formel wird nun gewöhnlich behauptet, dafs sie den Krümmungsmesser ϱ für jeden concaven/convexen Bogen bejaht/verneint angebe, und überhaupt der gewöhnlichen Formel für parallele Ordinaten $r = \frac{ds^3}{-\,dx\,ddy}$ $= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-\,dx\,ddy}$ entsprechend sey.

§. 33. Ich behaupte dagegen (§. 21), daſs dieses $\frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \dot{r} = \dot{M}C$ ist, nämlich für den Krümmungsmesser MC die bejahte oder verneinte Abscissenrichtung andeutet, und dieser Formel entsprechend für polarische Ordinaten die Formel

$$MC = \dot{\varrho} = -\frac{ds^3}{2dv^2\,d\varphi + v^2\,d\varphi^3 - vd\varphi\,ddv}$$

seyn muſs.

§. 34. Um diese Behauptungen durch eine Anwendung auf die Parabel, ohne mühsame Rechnung, bestätigt zu sehen, sey der Scheitel selbst der geküſste Punkt: so haben wir unser $\dot{r} = \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{hh}$ für alle Orte der Parabel in §. 14 schon gefunden. Für den Scheitel also wegen $y = o$, sogleich $\dot{r} = h = \frac{b}{2}$, dem halben Parameter gleich, und wie dieses $MC = \frac{b}{2}$, ins Abscissen + gerichtet.

Da unsere Formel für $\dot{\varrho}$, auf den Scheitelpunkt A sie eingeschränkt, wegen $v = o$ uns $MC = \dot{\varrho} = -\frac{dv^3}{2dv^2\,d\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{d\varphi}$ gibt, aus obiger Parabelgleichung $v \,.\, \sin\varphi^2 = b \,.\, \cos\varphi$, aber
$2v\sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, d\varphi + \sin\varphi^2\,dv = -b \,.\, \sin\varphi \,.\, d\varphi$,
für den Scheitel also, wegen $v = o$ und $\varphi = 90^\circ$ uns $\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{b}{1}$ giebt, so haben wir nun ebenfalls $MC = \dot{\varrho} = \frac{b}{2}$ durch unsere Formel vollkommen richtig gefunden; da hingegen die gewöhnliche Formel uns $\varrho = -\frac{b}{2}$, also für diesen concaven Bogen

der Parabel keineswegs einen bejahten Werth geben würde!

§. 35. Statt noch mehre einzelne Beispiele aufzuführen, wollen wir lieber aus allgemeinen Gründen uns davon überzeugen, dass weder die gewöhnliche, noch irgend eine andere Formel des ϱ, für polarische Ordinaten mit Convexität und Concavität ihr Zeichen wechseln könne! wobei es aber nöthig ist, uns deutlich darzustellen, was man bei diesen Constructionen durch polarische, drehende Ordinaten unter concaven und convexen Bogen zu verstehen pflegt.

§. 36. Bei diesen Constructionen pflegen die Analysten von Concavität und Convexität gegen den Pol zu sprechen. Man durchsieht sogleich, dass nunmehr von den vorhin erwähnten zweierlei Concavitäten und Convexitäten, 1) gegen die Basis, die Abscissenlinie, und 2) gegen das *latus*, die Directrice der normalen Ordinaten, nicht mehr die Rede seyn kann; auch hier der *radius vector* CM, wie der gedrehte trigonometrische Halbmesser, er mag gerichtet seyn wie er will, als eine absolute Länge zu betrachten ist, welche v genannt, dann z. B. das $v \cdot \sin \varphi$ und $v \cdot \cos \varphi$ dem trigonometrischen $\mp$ überlassen gibt.

Da nun jede absolute Länge, wo sie neben bejaht oder verneint gerichteten Linien in algebraischer Geometrie oder Trigonometrie vorkommt, allemal mit dem Zeichen $+$ belegt gedacht werden muss: so muss nun auch jedes Differential dv, welches eine Verlängerung der absoluten Länge v ausmacht, als ein $+$ dv, und jedes dv, welches eine Verminderung der absoluten Länge v ausmachen soll, als ein $-$ dv aufgeführt und gefunden werden.

§. 57. Mag daher (III. Fig. 6.) der *radius vector* CM = v liegen und gerichtet seyn, wie er will; da er als bejaht gerichtet behandelt werden muſs: so werden wir durch angewöhnte Anschaulichkeit am besten geholfen werden, wenn wir ihn jedesmal zenithwärts gerichtet uns denken, das heiſst, die Zeichnung der Curve so herumgewandt denken, daſs diese Vorstellung eintrete.

Sey nun F der Endpunkt des Kreisbogens AF = CA. arc φ = a. φ in der Kürze geschrieben, und FF' = a. dφ. Die verlängerte CF' treffe das Curvenelement MM' in M', so ist mit CM = v der Kreisbogen MN beschrieben, dv = NM'; und wenn von der MT die Curve in M berührt wird, so ist dv = NM' = NT werdend, das Curvenelement MM' = ds mag concav oder convex seyn, wie es will. In jedem Falle ist TM' = ddv werdend, *folglich* das Curvenelement convex/concav, je nachdem ddv einen Zuwachs/eine Abnahme der NT = dv ausmacht. Man sieht leicht ein, daſs dieses Folglich eben so gut eintritt, wenn das Curvenelement nicht anfwärts, sondern niederwärts laufend, also T in Z fallend, die NZ ein (—) dv wäre.

Also ist der Bogen MM' concav/convex, je nachdem ddv sich bejaht/verneint ergiebt; muſs also in dem gewöhnlichen Ausdrucke

$$\varrho = \frac{(v^2\, d\varphi^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{2 dv^2\, d\varphi + v dv\, dd\varphi + v^2\, d\varphi^3 - v.\, d\varphi\, ddv}$$

$$= \frac{(v^2 + dv^2 : d\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{dv^2}{d\varphi^2} + v \frac{dv\, dd\varphi}{d\varphi^3} + v^2 - v \cdot \frac{ddv}{d\varphi^2}},$$ im letzten Gliede des Nenners der Factor — ddv allerdings für einen concaven Bogen sich bejaht ergeben.

Daraus aber folgt ja nicht, dafs auch der ganze Nenner sich bejaht ergebe, wie es diejenigen Lehrer voraussetzen müfsten, welche den Factor ds des Zählers allemal für bejaht zu achten fordern! Zu geschweigen, dafs ich auch diese Forderung in der schon §. 17 angeführten Schrift als unstatthaft erwiesen habe.

§. 38. Ueberdies gibt es Curvenelemente, deren polarische Concavität und Convexität durch den zweiten Differentialquotienten $\frac{ddv}{d\varphi^2}$ nach dem gewöhnlichen calculatorischen Verfahren gar nicht bestimmt werden kann. Denn wo sich $\frac{ddv}{d\varphi^2} = 0$ ergeben hat, da würde man ja nach jenem Verfahren nur zu sagen wissen, dafs dadurch nichts bestimmt werde. Dieser Fall kommt sehr merkwürdig in der Archimedischen Spirale vor. Denn ihre Gleichung $v = b\varphi$ der Kürze wegen $b = \frac{a}{2\pi}$ bedeutend, gibt $dv = bd\varphi$, also $d\varphi$ constant gefordert, auch $\frac{ddv}{d\varphi^2} = 0$, und im ganzen Ausdrucke des ϱ kommt dann kein zweites Differentialverhältnifs vor, welches über Concavität entscheiden könnte. Mehr über dieses alles können Geübtere in der angeführten Schrift finden.

Hier aber, in diesem Lehrbuche für Anfänger, hielt ich für rathsam, jene Unrichtigkeiten ebenfalls zu rügen, welche sonst auch Geübteren viel mühselige Conjecturen und vergeblichen Zeitaufwand verursachen können.

Einundzwanzigstes Capitel.

Die gröſsten und kleinsten Krümmungen einer Curve zu finden.

§. 1. Eine Curve hat in ihrem Orte M eine gröſste/kleinste Krümmung, wenn die Länge ihres dortigen Krümmungsmessers MC = r eine kleinste/gröſste ist, sie mag dabei bejaht oder verneint gerichtet seyn; daher man freilich, wie überhaupt bei Untersuchung des Gröſsten und Kleinsten, vor allem andern nach denjenigen Werthfällen des ersten Differentialquotienten zu fragen hat, in welchen er = o sich ergibt. Da aber durch den bejahten/verneinten Werth des dafür gehörigen zweiten Differentialquotienten allemal das Daseyn eines algebraisch kleinsten/gröſsten MC entschieden wird: so muſs auch in Betracht genommen werden, daſs nur bei bejaht gerichteten MC hiemit auch eine kleinste/gröſste Länge der MC bestimmt ist, bei verneint gerichteten MC aber umgekehrt die algebraisch kleinste/gröſste MC eine gröſste/kleinste Länge ausmachen muſs; woraus schon abzunehmen ist, wie unentbehrlich unsere obigen Richtungsbestimmungen der MC sich hier beweisen werden.

§. 2. Indem wir nun zuvörderst die Differentialquotienten in Anspruch nehmen wollen, so wird dabei auf folgende Weise zu verfahren seyn.

Wenn wir durch die aufgefundenen Werthfälle des $\frac{dr}{dx} = o$, diejenigen Orte M der Curve aufge-

funden haben, deren Krümmungsmesser MC = r einen eminenten Werth hat (Cap. XVII. §. 25.): so muſs nun, ob diese Eminenz eine gröſsere oder kleinere Länge, als die ihr benachbarten MC ausmache, dadurch entschieden werden, daſs man auch den zweiten Quotienten $\frac{ddr}{dx\,dx}$ findet, und nachdem man ihn auf denselben Ort M eingeschränkt hat, genau beachtet, ob sein bejahter oder verneinter Werth dem $\mp$ des dortigen MC = r gleich- oder gegenstimmig sey. Durch die Uebereinstimmung wird entschieden, daſs die nächstbenachbarten r länger werdend, also die absolute Gröſse des untersuchten MC = r eine kleinste Länge, also die Krümmung eine gröſste seyn; und durch die Nichtübereinstimmung wird dagegen eine kleinste Krümmung erwiesen.

§. 3. Diese Lehren sind einleuchtend. Wenn wir aber z. B. auf die äuſserst einfache Curve, auf die Parabel nach der Gleichung yy = bx sie anwenden wollen: so haben wir, $h = \frac{b}{2}$ bedeutend, für jeden ihrer Orte M den Krümmungsmesser $MC = r = \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{hh}$, also

$$\frac{dr}{dx} = \frac{3}{2hh}(y^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} . 2y\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2hh}(y^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} . b$$
$$= \frac{3}{h}(y^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Demnach würden wir $\frac{dr}{dx} = o$ nur erhalten, wenn $y^2 + h^2 = o$, also $y^2 = -h^2$, also $y = \sqrt{-hh}$ wäre. Ein unmögliches y! wodurch entschieden wird, daſs es für keinen möglichen Ort der Parabel ein eminentes r geben könne, das heiſst, ein solches, dessen erster Differentialquotient = o sey.

Gleichwohl ist es einleuchtend, dafs in dem Scheitel der Parabel eine gröfste Krümmung Statt findet, indem dort $r = h$, also kleiner als in jedem andern Orte dieser Curve sich ergibt! (Man wird nachher in §. 11. und §. 13. die Sache erklärt finden.)

§. 4. Eben so ist es bei der Ellipse nach der Gleichung $yy = bx - \frac{b}{a} xx$ einleuchtend, dafs sie, wenn a als die Axe, welche dem Parameter b zugehört, die gröfsere, also ihre andere Axe c die kleinere ist, wie wir der Kürze wegen annehmen wollen, in den beiden Scheitelpunkten der Axe a eine gröfste Krümmung vorhanden ist, welche wiederum vermittelst des $\frac{dy}{dx} = 0$, aus dieser Gleichung methodisch nicht gefunden werden kann. Denn den Krümmungsmesser r nach der gewöhnlichen Formel $r = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ gefunden, haben wir

$$r = \frac{4}{bb}\left[y^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \text{ also } \frac{dr}{dx} =$$

$$\frac{3 \cdot 2}{bb}\left[y^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2y\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right)\frac{b}{a}\right).$$

Der erste unter den beiden veränderlichen Factoren, von welchen man eine Vernullung des $\frac{dr}{dx}$ erwarten könnte, würde ein $x = \frac{a}{2} \mp \frac{a}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{b}{a-b}\right)}$, also, da der Parameter $= b\frac{cc}{a}$ ist, ein bejahtes x gröfser als die Axe a, und ein verneintes x, kleiner als o verlangen, dergleichen für irgend einen möglichen Ort nach dieser Ellipsengleichung nicht vorhanden sind. Gleichwol würde die Bestimmung der gröfsten Krümme in den Endpuncten der Axe a ver-

mittelst des Differentialquotienten, gerade von diesem Factor abhängen müssen.

§. 5. Denn den zweiten veränderlichen Factor $= 0$ verlangt, gibt uns $x = \frac{a}{2}$, und somit zwei Orte der Ellipse an, von denen der eine O genannt, der bejahten Ordinate $y = + \frac{c}{2}$, der andere $=$ U genannt, der verneinten Ordinate $y = - \frac{c}{2}$ zugehört.

§. 6. Wollen wir nun methodisch, vermittelst des zweiten Differentialquotienten, es bestimmt wissen, ob die Krümmungen in diesen Orten O und U gröſste oder kleinste seyen: so müssen wir den zweiten Differentialquotienten $\frac{ddr}{dx\,dx}$ suchen, und nun sehen, ob er auf $x = \frac{a}{2}$, und dabei dann 1) auf $y = + \frac{c}{2}$ und 2) auf $y = - \frac{c}{2}$ eingeschränkt, in 1) den Krümmungsmesser OC, in 2) den Krümmungsmesser UC, gleich oder ungleich bezeichnet uns angebe!

§. 7. Den in §. 4. bereits gefundenen ersten Differentialquotienten

$$\frac{dr}{dx} = \frac{3 \cdot 2}{bb}\left[y^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2y\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right)\frac{b}{a}\right)$$

durch $\frac{dr}{dx} = \frac{3 \cdot 2}{bb} \cdot P^{\frac{1}{2}} \cdot Q$, der Kürze wegen geschrieben, haben wir $\frac{ddr}{dx\,dx} = \frac{6}{b \cdot b}\left(\frac{1}{2}\frac{Q}{P^{\frac{1}{2}}}\frac{dP}{dx} + P^{\frac{1}{2}}\frac{dQ}{dx}\right)$, und kommt es nun darauf an, das Zeichen $\mp$ dieses zweiten Differentialquotienten zu finden, wenn die-

ser allgemeine Ausdruck desselben auf das $x = \frac{a}{2}$, und dabei auch 1) auf $y = + \frac{c}{2}$ für den Ort O, und 2) auf $y = - \frac{c}{2}$ für den Ort U eingeschränkt ist.

Da nun der bejahte Factor $\frac{6}{b'b}$ im Zeichen nichts ändert, aus §. 5. aber schon bekannt ist, dafs für $x = \frac{a}{2}$ sich $Q = 0$, also $P = y^2 + 0 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ sich ergibt; so mufs für $x = \frac{a}{2}$ das erste Glied in obiger Parenthese sich $= 0$, und demnach das ganze $\frac{ddr}{dx\,dx} ::: P^{\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx}$ sich ergeben, jedes seiner $x = \frac{a}{2}$ gesetzt.

Da nun ferner aus der Ellipsengleichung sich $2y \frac{dy}{dx} = \left(b - 2\frac{b}{a}x\right)$ ergibt, folglich obiges $Q = b - 2\frac{b}{a}x - 2\frac{bb}{2a} + 2\frac{bb}{aa}x$, uns $\frac{dQ}{dx} = -2\frac{b}{a} + 2\frac{bb}{aa}$ für alle x, also auch für $x = \frac{a}{2}$ gibt; für $x = \frac{a}{2}$ aber

$P^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{cc}{22}} = \pm \frac{c}{2}$ seyn mufs: so wissen wir nunmehr, dafs der zweite Differentialquotient, auf $x = \frac{a}{2}$ eingeschränkt, ein

$$\frac{ddr}{dx\,dx} ::: \left(\pm\right)\frac{c}{2}\left(-2\frac{b}{a}+2\frac{bb}{aa}\right) ::: \pm c\left(-\frac{cc}{aa}+\left(\frac{cc}{aa}\right)^2\right)$$

seyn mufs.

§. 8. I.) Ist nun c die kleinere, a die gröfsere Ellipsenaxe, so hat man $\frac{ddr}{dx\,dx} ::: -\left(\frac{+}{-}\right)\frac{c}{2}$; und da nun nach §. 4. r ::: (±) $\frac{c}{2}$ sich ergibt, also sowol für $y = +\frac{c}{2}$ als für $y = -\frac{c}{2}$, der zweite Differentialquotient dem r ungleich bezeichnet ausfällt; so mufs in beiden Fällen, also sowol für den Ort O, als für den Ort U, die Länge des Krümmungsmessers eine gröfste, folglich die Krümmung eine kleinste seyn.

II.) Soll c die gröfsere und a die kleinere Axe seyn, so hat man

$\frac{ddr}{dx\,dx} ::: \left(\frac{+}{-}\right)\frac{c}{2}$, und wie vorhin r ::: $\left(\frac{+}{-}\right)\frac{c}{2}$; wodurch also nunmehr in O sowol als in U eine gröfste Krümmung bestimmt wird?

Ein einleuchtend richtiges Resultat, durch unrichtige Mittelsätze gefunden! deren Unrichtigkeiten durch die hier vorhandenen Gegensätze allerdings sich unschädlich machen konnten.

§. 9. Da wir r nach der gewönlichen Formel $r = \frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ gefunden haben: so wissen wir aus unsern Lehren im vorigen Capitel, dafs wir hier mit einem MC = r es zu thün haben, also auch z. B. für I.) in §. 8. sich uns

ein $MC = r = \left(\frac{+}{-}\right)\frac{c}{2}$ und ein $\frac{ddr}{dx\,dx} = \left(\frac{+}{-}\right)\frac{c}{2}$

mufs ergeben haben, deren Richtungsgröfse weder bejaht noch verneint, also eine o seyn mufs, weil ja die normale Axe c von der Abscissenrichtung gar nichts an sich hat.

Wenn wir dieses deutlich eingesehen, eben daraus geschlossen hätten, daſs hier für die Krümmungsmesser OC und UC lediglich ihre Länge bestimmt werde, und das für ihr $\frac{ddr}{dx\,dx}$ gefundene Zeichen

— im Falle I / + im Falle II lediglich subtractiv / additiv zu verstehen sey,

lediglich eine Verkleinerung / Vergröſserung der benachbarten r andeutend sey, dann würden wir allerdings durch richtige Schlüsse zum richtigen Resultate gelangt seyn, für diese Aufgabe. In andern Aufgaben könnte die unrichtige Behauptung, daſs $OC = r ::: + c$ und $UC = r ::: - c$ sey, für die Aufgabe selbst eine unrichtige Antwort veranlassen, noch häufiger aber durch Verbindung mit andern Untersuchungen in Irrthum führen.

Etwa zu sagen, daſs man nur $r = CO$, statt $r = OC$, zu verstehen brauche, um hier richtig zu werden, würde ein eigentlich seichtes Palliativ seyn.

§. 10. Das völlig richtige Verfahren ist folgendes. Da die vorhin aufgefundenen $M\dot{C} = \dot{r} ::: (\pm) c$ und $\frac{dd\dot{r}}{dx\,dx} ::: -(\pm)\, c$ für Fall I, auch $\frac{dd\ddot{r}}{dx\,dx} ::: (\pm)\, c$ für Fall II, weil c nichts als Ordinatenrichtung an sich hat, für diese Richtung zu bestimmen wären; so müſste für sie die andere Formel $M\ddot{C} = \ddot{r} = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ befolgt seyn. Indem nun diese uns $M\ddot{C} = \ddot{r} ::: -(\pm)\, c$, und $\frac{dd\ddot{r}}{dx\,dx} = (\pm)\, c$ für Fall I, auch $\frac{dd\ddot{r}}{dx\,dx} = -(\pm)\, c$ für Fall II geben muſs; so wird nun alles mit den wirklich vorhandenen Richtungen wahrhaft übereinstimmend, auch das richtige Resultat auf völlig

richtigem Wege gefunden, für die seit §. 8. behandelten gröſsten und kleinsten Krümmungen in den Grenzpunkten der normalen Axe c.

§. 11. Was nun aber die in §. 8. auch erwähnten gröſsten oder kleinsten Krümmungen in den Gränzpuncten der Zwerchaxe a betrifft; so können diese durch die gewöhnliche Methode vermittelst der Differentialquotienten schlechterdings nicht gefunden werden, weil ja in diesen Gränzpunkten, und eben so auch in dem oben schon erwähnten Scheitelpuncte der Parabel, $\frac{dy}{dx}$ weder $=$ o noch $= \infty$ ist. Ferner muſs man bedenken, daſs diese Krümmungen nur als einseitige gröſste oder kleinste zu finden sind. Denn obgleich z. B. die Parabel der Gleichung $yy = bx$, eben deshalb auch algebraisch nur eine einzige Curve ausmacht, weil sie durch diese eine Gleichung bestimmt wird; so wird doch ihr einer Schenkel durch die Reihe der bejahten Ordinaten $y = + \sqrt{bx}$, ihr andrer unterer Schenkel durch die Reihe der verneinten Ordinaten $y = - \sqrt{bx}$ bestimmt.

Da jede von diesen beiden Reihen nur für bejahte x mögliche y, und daher mögliche Orte der Curve bestimmt; jede Untersuchung für gröſste und kleinste Werthe aber allemal lauter durch einerlei Reihe bestimmbare Werthe voraussetzen muſs: so hat man für den dem Scheitelpuncte A zugehörigen Krümmungsmesser AC in Hinsicht des bejahten Curvenschenkels zu fragen, ob seine nächsten möglichen Nachbaren, für ein unendlich kleines $+x$ länger oder kürzer als er selbst sind; und eben diese Frage ist dann auch in Hinsicht des verneinten Curvenschenkels aufzuwerfen.

§. 12. Will man dieses Länger oder Kürzer durch den zweiten Differentialquotienten untersu-

chen, so gelten dafür dieselben Regeln, welche in §. 2 gegeben sind, obgleich hier $\frac{dy}{dx} = o$ nicht ist. Indessen habe ich in meiner neuen Theorie des Gröfsten und Kleinsten gezeigt, wie man selbst auch, wo $\frac{dy}{dx} = o$ ist, besonders um die Fälle $\frac{dy}{dx} = \infty$ mit zu umfassen, auf andere Weise kürzer und anschaulicher schliefsen kann.

§. 13. An der Parabel ist überhaupt der Krümmungsmesser $\dot{M}\dot{C} = \dot{r} = \frac{(y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}{hh}$, für den Scheitelpunct A also der Krümmungsmesser $A\dot{C} = \frac{(h^2)^{\frac{3}{2}}}{hh}$, also kleiner als die nächsten Nachbaren für ein unendlich kleines y, es mag bejaht oder verneint genommen werden; daher hier freilich sowohl in Hinsicht des bejahten als verneinten Schenkels sogleich erwiesen ist, dafs in A die Krümmung eine gröfste sey. Aber durch solche leichte Beispiele mufs man sich nicht irren lassen, und die neuen Lehren für unnöthig erklären wollen, welche allgemein und methodisch durchgreifend sind.

Zweiundzwanzigstes Capitel.

Partielle Differentialgleichungen.

Lehrsatz.

§. 1. Wenn U eine Function von zwei, drei oder noch mehr Variabeln w, x, y, z, ... ist, und zwei derselben, x und y, mit constanten Urdifferentialen dx und dy belegt sind: so muſs ${}^{y}d^{x}dU = {}^{x}d^{y}dU$ seyn.

Beweis.

§. 2. Dergleichen Function durch $\overset{(w,x,y,z,\ldots)}{U}$ angedeutet, würde, was aus ihr geworden seyn muſs, wenn man bloſs ihr x mit $\triangle x$, oder bloſs ihr y mit $\triangle y$, oder ihr x mit $\triangle x$ und zugleich y mit $\triangle y$ belegt hat, durch

$$\overset{(w,x+\triangle x,y,z,\ldots)}{U},\ \overset{(w,x,y+\triangle y,z,\ldots)}{U},\ \overset{(w,x+\triangle x,y+\triangle y,z,\ldots)}{U}$$

bedeutet werden; statt dessen wir aber

$$\overset{(\triangle x)}{U},\quad \overset{(\triangle y)}{U},\quad \overset{(\triangle x,\triangle y)}{U}$$

der mehren Kürze wegen schreiben wollen.

Da nun jede Functionsdifferenz dadurch gefunden werden kann, daſs man von der belegten Function die unbelegte abzieht,

folglich ${}^{y}\triangle.{}^{x}\triangle U = {}^{y}\triangle(\overset{(\triangle x)}{U} - U) = \overset{(\triangle y,\triangle x)}{U} - \overset{\triangle y}{U} - (\overset{\triangle x}{U} - U)$

und ${}^{x}\triangle.{}^{y}\triangle U = {}^{x}\triangle(\overset{(\triangle y)}{U} - U) = \overset{(\triangle x,\triangle y)}{U} - \overset{\triangle x}{U} - (\overset{\triangle y}{U} - U)$

also auch ${}^{y}d^{x}dU = \overset{(dy,dx)}{U} - \overset{dy}{U} - U$

und ${}^{x}d^{y}dU = \overset{(dx,dy)}{U} - \overset{dx}{U} - U,$

also beides einerlei seyn muſs, indem es durch sich

selbst einleuchtet, daſs sich $\frac{\triangle x . \triangle y}{U} = \frac{\triangle y . \triangle x}{U}$ ergeben, völlig einerlei Form und Gröſse es geben müsse, ob man in der Function U

1) zuvörderst jedes ihrer x mit $\triangle x$, und dann erst jedes ihrer y mit $\triangle y$ belege, oder ob man

2) zuvörderst jedes ihrer y mit $\triangle y$, und dann erst jedes ihrer x mit $\triangle x$ belege.

Beide Belegungsfolgen können auch nichts anders geben, als was man durch gleichzeitige Belegung des x und y erhalten würde. (Wir Infinitesimalisten könnten auch dieses Einerlei ganz systematisch erweisen, indem wir den Zeitverlauf zwischen beiden Belegungen unendlich klein und = o werdend fordern, auch dieses o sogar wirklich leisten können, wenn wir mit der rechten und mit der linken Hand gleichzeitig belegen.)

Anmerkung.

§. 3. Der Beweis ist aus dem allgemeinen Begriffe einer Differenz so unmittelbar abgeleitet, daſs er auch für variable Belegungen gültig seyn muſs. Da ich aber in dem Lehrsatze dx und dy als constante Urdifferentiale gefordert habe: so ist damit auch gefordert, daſs x und y zwei von einander unabhängig veränderliche Gröſsen seyn sollen. Ueberhaupt ist es kaum zu erinnern nöthig, daſs wir allemal unabhängige Variabeln wollen verstanden wissen, bis wir sie solchen Formen unterworfen haben, durch die sie offenbar von einander abhängend geworden seyn müssen.

Beispiele für den Lehrsatz.

§. 4. 1) Sey $U = x^2 . y^3 . \log z$, so hat man:

$$\begin{array}{l|l} {}^{x}dU = y^3 . \log z . 2x\,dx & {}^{y}dU = x^2 . \log z . 3y^2\,dy \\ {}^{y}d\,{}^{x}dU = \log z . 2x . 3y^2\,dy\,dx & {}^{x}d\,{}^{y}dU = \log z . 3y^2 . 2x\,dx\,dy \end{array}$$

2) Werden in diesem $U = x^2 . y^3 . \log z$ die x unbelegt gelassen, aber y und z belegt: so hat man

$$\begin{array}{l|l} {}^{y}dU = x^2 . \log z . 3y^2\,dy & {}^{z}dU = x^2 . y^3 . d\log z \\ {}^{z}d\,{}^{y}dU = x^2 . 3y^2 dy . d\log z & {}^{y}d\,{}^{z}dU = x^2 . 3y^2\,dy . d\log z , \end{array}$$

also uns gewiſs, daſs sich auch hier ${}^{z}d\,{}^{y}dU = {}^{y}d\,{}^{z}dU$ ergibt, wir mögen es schon wissen, daſs $d\log z = \frac{dz}{z}$ ist, oder mögen dieses logarithmische Differential noch dahin gestellt seyn lassen.

3) $U = (\sin x)^2 . \log$ gibt

$$\begin{array}{l|l} {}^{x}dU = \log y . 2 . \sin x . d\sin x & {}^{y}dU = (\sin x)^2 . d\log y \\ {}^{y}d\,{}^{x}dU = 2 . \sin x\, d\sin x . d\log y & {}^{x}d\,{}^{y}dU = 2 . \sin x\, d\sin x . d\log y \end{array}$$

Auch hier sehen wir den Lehrsatz schon bestätigt, das trigonometrische und logarithmische Differential möchte seyn, was es wollte; weil wir ja durch diese Ungewiſsheit nicht verhindert würden, diese U, in so fern sie eine algebraische Function der beiden Variabeln $\sin x$ und $\log y$ ist, als solche in Hinsicht des Lehrsatzes zu prüfen.

Uebrigens aber ist es aus dem Erweise einleuchtend, daſs der Lehrsatz auch jede transscendente Functionirung mit umfassend seyn muſs. Ein Beispiel sey die folgende exponentiale:

4) Sey $U = x^z$, so ist ${}^{x}dU = z . x^{z-1}\,dx$ (VI §. 11.)
und ${}^{z}d\,{}^{x}dU = x^{z-1}\,dz\,dx + z\,dx . {}^{z}d . x^{z-1}$ (VI. §. 31)

$= x^{z-1}\,dz\,dx + z\,dx . x^{z-1}\,dz . lx$ (XII. (3*)

Dagegen
ist ${}^{z}dU = x^z\,dz . lx$ (XII. (3.)
und ${}^{x}d\,{}^{z}dU = z . x^{z-1}\,dz . dx . lx + x^z . dz . d\,lx$ (VI. §. 31; XII. §. 2)

$= z . x^{z-1}\,dz . dx . lx + x^{z-1}\,dz . dx$ (weil $d\,lx = \frac{dx}{x}$)

§. 5. Dieser Lehrsatz, daſs für jede Function U zweier von einander unabhängigen Variabeln, auch bei constanten dx und dy, allemal sich $^{y}d\,^{x}dU = {^{x}d}\,^{y}dU$ ergeben muſs, ist nicht nur für die Differentialgleichung, wie wir schon am Ende des gegenwärtigen und in den beiden folgenden Kapiteln sehen werden, sondern auch für die Integralrechnung von groſsem Nutzen; und es ist sehr schicklich, sogleich einige vorläufige Kenntniſs schon hier davon mitzutheilen.

§. 6. Dieser Nutzen besteht darin, über einen mit dx und dy belegten Ausdruck uns gewiſs zu machen, ob es ein reelles oder imaginäres Differential sey, das heiſst, ob es irgend eine Function des x und y geben könne, durch deren Differenzirung das vorgegebne Differential entstehen könne, oder ob dergl. Function unmöglich sey. Um z. B. die Differentialgleichung

$$dU = 3y^2 . dx + 4xy . dx + 6xy . dy + 2x^2 dy$$

der Probe zu unterwerfen, bedenken wir, daſs $^{x}dU = (3y^2 + 4xy)\,dx$ und $^{y}dU = (6xy + 2x^2)\,dy$ ist, also $^{y}d\,^{x}dU = (6y + 4x)\,dx\,dy$ und $^{x}d\,^{y}dU = (6y + 4x)\,dy\,dx$ sich ergibt. Da nun diese beiden zweiten Differentiale einander gleich sind: so ist das vorgegebene dU allerdings ein mögliches Differential. In der Integralrechnung wird es dann auch gelehrt werden, wie man sowohl aus $^{y}d\,^{x}dU$, als aus dem $^{x}d\,^{y}dU$ auf dU zurückschlieſsen kann, und in der That durch beiderlei Schlüsse auf einerlei dU wieder zurückkommt.

§. 7. Wenn wir dagegen die Differentialgleichung $dU = x^2 y^3 dx + a^2 x^2 y^2 dy$ der Prüfung unterwerfen, so haben wir

$^{x}dU = x^2 y^3 dx$	$^{y}dU = a^2 x^2 y^2 dy$
$^{y}d\,^{x}dU = 3x^2 y^2 dx\,dy$	$^{x}d\,^{y}dU = 2a^2 x y^2 dy\,dx$, und

sind durch die Ungleichheit dieser beiden zweiten

Differentiale sogleich versichert, dafs dieses dU kein reelles, kein mögliches Differential ist. Durch die Lehren der Integralrechnung wird uns auch künftig erhellen, dafs das Differential ${}^{y}d\,{}^{x}dU = 3\ x^2 y^2 . dx . dy$ nur aus einer Function entstehen kann, welche das Glied $x^2 y^3$ in sich hat; und dagegen das andere Differential statt dieses Gliedes das Glied $a^2 x^2 y^2$ verlangt. Da es nun unmöglich ist, dafs diese beiden Glieder bei allen veränderlichen Werthen des x einander gleich seyn könnten: so liegt hiermit am Tage, dafs die Vermuthung, als ob das vorgegebene Differential dU aus irgend einer Function mit zwei von einander unabhängigen Variabeln x und y entstehen könne, mit den erwiesenen Regeln der Differentialrechnung im Widerspruch steht.

Quotienten-Ausdruck des Lehrsatzes.

§. 8. Da für jedes U, dessen x und y mit constanten dx und dy belegt sind,

allemal ${}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{x}d\,{}^{y}dU$ seyn mufs: so mufs auch, wenn ${}^{x}dU = P\,dx$ und ${}^{y}dU = Q\,dy$ gefunden ist, allemal ${}^{y}d . P dx = {}^{x}d . Q dy$, folglich

auch $\frac{{}^{y}dP}{dy} = \frac{{}^{x}dQ}{dx}$,

das ist $\frac{{}^{y}d . \frac{{}^{x}dU}{dx}}{dy} = \frac{{}^{x}d . \frac{{}^{y}dU}{dy}}{dx}$,

wegen des constanten dx und dy,

also $\frac{{}^{y}d . {}^{x}dU}{dy\ dx} = \frac{{}^{x}d . {}^{y}dU}{dx\ dy}$ seyn.

§. 9. Unter dieser letzten Form ist der Lehrsatz noch eben so bequem als unter seiner ersten in §. 1., um für ein vorgegebenes Differential, welches dx und dy enthält,

z. B. für $dU = 3y^2\,dx + 4xy\,dx + 6xy\,dy + 2x^2\,dy$

zu prüfen, ob es ein reelles, mögliches Differential sey, das heifst, ob es wirklich eine Function U mit zwei constant belegten Variabeln x und y geben könne, deren Gesamtdifferential dieses dU seyn würde!

Da man für das vorgegebene dU

$$\frac{{}^{x}dU}{dx} = 3y^2 + 4xy \quad \text{und} \quad \frac{{}^{y}dU}{dy} = 6xy + 2x^2 \text{ hat,}$$

$$\text{also } \frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\ dx} = 6y + 4x \quad \frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\ dy} = 6y + 4x \text{ findet:}$$

so trifft die Probe zu, und so sind wir versichert, dafs es ein U als Function zweier veränderlichen Gröfsen x und y gibt, durch deren Belegung man das vorgegebene dU als ihr Differential erhält. Auch werden wir durch allgemeine und bündige Regeln der Integralrechnung schliefsen lernen, dafs nicht nur aus diesem $\frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\ dx} = 6y + 4x$ auf die Function $U = 3xy^2 + 2x^2y$ zurück zu schliefsen ist, sondern auch dieses $\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\ dy} = 6y + 4x$ gerade eben dieselbe Function verlangt.

§. 10. Wenn dagegen bei irgend einem vorgegebenen Differentiale dU, für die beiden Quotienten $\frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\ dx}$ und $\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\ dy}$ nicht einerlei Werth sich ergibt: so werden dann die Lehren der Integralrechnung uns versichern, dafs diese beiden Quotienten auch zwei verschiedne U nothwendig erfordern, also irgend eine Function U, aus welcher beide entstehen könnten, nicht möglich sey. Unbedenklich können wir dergleichen dU ein unmögliches, imaginäres Differential nennen. Denn eben so, wie in der Algebra $\sqrt{-1}$ eine unmögliche Wurzel, und $-aa$ ein un-

mögliches Quadrat genannt wird, weil diese Forderungen mit allgemein und rathsam angenommenen Difinitionen und bündig erwiesenen Lehren der Algebra im Widerspruch stehen; man auch in der Trigonometrie einen Sinus gröſser als den Halbmesser, einen unmöglichen Sinus nennt, weil er mit der Definition des Sinus sich widerspricht; eben so kann und muſs man jedes Differential und jedes Integral unmöglich nennen, welches mit den richtig erwiesenen Lehren der Differential- und Integral-Wissenschaft im Widerspruche steht, obgleich dessen Ausdruck mit irgend einer algebraischen oder trigonometrischen Unmöglichkeit nicht behaftet seyn mag.

Wenn wir z. B. für das in §. 7. vorgegebne dU gefunden haben, daſs $\frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\ dx} = 3x^2y^2$ und dagegen $\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\ dy} = 2a^2xy^2$ sich ergibt: so sind wir dadurch versichert, daſs dieses vorgegebene dU als Differential einer Function von zwei unabhängigen Variabeln x und y nicht möglich ist.

§. 11. Bei $dU = 3ax^2dx + 4y^3dy$ liegt sogleich vor Augen, daſs es ein mögliches Differential ist, weil es offenbar ist, daſs
aus der Function $U = ax^3 + y^4$ sich
das Differential $dU = 3ax^2dx + 4y^3dy$ ergeben muſs.

Es ist schlechterdings nicht zu läugnen, daſs dieses U eine Function zweier Variabeln x und y sey, und dieses dU dem Lehrsatze unterworfen seyn muſs.

Da es $\frac{{}^{x}dU}{dx} = 3ax^2$ und $\frac{{}^{y}dU}{dy} = 4y^3$ in sich hat, so gibt es $\frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\ dx} = 0$, und auch $\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\ dy} = 0$, wel-

ches nicht nur dem Lehrsatze, dafs $\frac{{}^y d\, {}^x dU}{dy\ dx} = \frac{{}^x d\, {}^y dU}{dx\ dy}$, kürzer, dafs ${}^y d\, {}^x dU = {}^x d\, {}^y dU$ seyn soll, keineswegs widerspricht, sondern auch andeutet, dafs die Frage, ob das vorgegebene dU ein mögliches Differential sey, sogar für alle diejenigen dU zu bejahen ist, welche ebenfalls, wie das vorgegebene, ihr ${}^y d\, {}^x dU = o = {}^x d\, {}^y dU$, dem gemeinschaftlichen $= o$ zu verdanken haben. Dergleichen dU kann es nun ungleich mehre geben, als wenn sich diese Gleichheit ein gemeinschaftliches $= X$, oder ein gemeinschaftliches $= Y$. oder sogar ein gemeinschaftliches $= X + Y$ ausbedingen mufs, dessen X und Y wirklich bestimmte Functionen des x und y seyn sollen.

In der That werden wir in der Integralrechnung durch ihre allgemein erwiesenen Lehren folgern können, dafs sowohl dieses ${}^y d\, {}^x dU = o$, als auch dieses ${}^x d\, {}^y dU = o$ einem jeden $U = X + Y$ zugehören könne, dessen X irgend eine Function des x, und dessen Y irgend eine Function des y ist, sie sey, welche sie wolle.

§. 12. Sey $dU = a\,dx + b\,dy$, so hat man

$\frac{{}^x dU}{dx} = a$	$\frac{{}^y dU}{dy} = b$
$\frac{{}^y d\, {}^x dU}{dy\ dx} = o$	$\frac{{}^x d\, {}^y dU}{dx\ dy} = o$

Sey $dU = a \,.\, dx$ gegeben, so ist

auch $dU = a\,dx + o \,.\, dy$

also $\frac{{}^x dU}{dx} = a$ und $\frac{{}^y dU}{dy} = o$

also $\frac{{}^y d\, {}^x dU}{dy\ dx} = o$ und $\frac{{}^x d\, {}^y dU}{dx\ dy} = o$

Durch diese Beispiele ist nun verständlich geworden der folgende

Zusatz zum Lehrsatze.

§. 13. Der Lehrsatz, dafs ${}^{y}d{}^{x}dU = {}^{x}d{}^{y}dU$ seyn mufs, wenn $dU = {}^{x}dU + {}^{y}dU$ ein mögliches Differential seyn soll, bleibt auch gültig, wenn ${}^{x}dU$ oder ${}^{y}dU$ oder auch beides schon eine blofse Scheinfunction, oder constante Gröfse, oder auch $= 0$ ist.

Anwendung auf drei belegte Variabeln.

§. 14. In Functionen U mit drei belegten Variabeln x, y, z weifs man, zuvörderst

nur x und y belegt gedacht, dafs $\frac{{}^{y}d{}^{x}dU}{dy\ dx} = \frac{{}^{x}d{}^{y}dU}{dx\ dy}$,

dann x „ z „ „ „ „ $\frac{{}^{x}d{}^{z}dU}{dx\ dz} = \frac{{}^{z}d{}^{x}dU}{dz\ dx}$,

endlich y „ z „ „ „ „ $\frac{{}^{y}d{}^{z}dU}{dy\ dz} = \frac{{}^{z}d{}^{y}dU}{dz\ dy}$ seyn

mufs, jedesmal nach dem Lehrsatze §. 1., den wir für ein U von noch so vielen Variabeln gültig vorgetragen haben, von denen nur ihrer zwei belegt gedacht wurden.

§. 15. Wenn wir daher ein vorgegebenes dU, welches dx und dy und dz enthält, in Hinsicht seiner Mögliehkeit und Unmöglichkeit prüfen wollen: so müssen wir die Prüfung in §. 9. zweimal anstellen. Denn wenn nur zwei von den so eben aufgeführten Gleichungen zutreffen, so ist uns dadurch die dritte schon gewifs.

Erklärung.

§. 16. Zum Beispiel ${}^{y}d{}^{x}d{}^{y}d{}^{y}d{}^{x}dU$ bedeutet ein fünftes Partialdifferential des U, dadurch gefunden,

daſs man

zuvörderst $\quad {}^{x}dU = P.dx$,

dann $\quad {}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{y}d.Pdx = Qdy.dx$,

dann $\quad {}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{y}d.Qdy\,dx = Rdy.dy\,dx$,

dann $\quad {}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{x}d.Rdy\,dy\,dx = Sdx.dy\,dy\,dx$,

endlich $\quad {}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{y}d.Sdx\,dy\,dy\,dx = Tdy.dx\,dy\,dy\,dx$

findet.

Hieraus erhellet, was es heiſsen soll, wenn man behauptet,

daſs $\quad {}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU = T\,dx\,dx\,dy\,dy\,dy$

auch $= {}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU = T\,dy\,dy\,dy\,dx\,dx$

auch $\dfrac{{}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\,dx\,dy\,dy\,dx} = \dfrac{{}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dx\,dx\,dy\,dy\,dy} = T$,

auch $= \dfrac{{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU}{dy\,dy\,dy\,dx\,dx} = T$ sey,

Lehrsatz 2.

§. 17. Wenn eine Function U, m mal auf x, und n mal auf y differenziirt ist, es mag geschehen seyn, in welcher Ordnung es wolle: so ist das dadurch erhaltene $(m+n)^{te}$ Differential allemal $= {}^{x}d^{m}.{}^{y}d^{n}.U$ und auch $= {}^{y}d^{n}.{}^{x}d^{m}.U$, folglich auch jedes ${}^{x}d^{m}.{}^{y}d^{n}.U = {}^{y}d^{n}.{}^{x}d^{m}.U$, das heiſst: man erhält einerlei $(m+n)^{tes}$ Differential, es mag U zuvörderst m mal auf x, und dann noch n mal auf y differenziirt werden, oder es mag umgekehrt U zuvörderst n mal auf y, und dann noch m mal auf x differenziirt werden.

Beweis.

§. 18. Da jedes ${}^{y}d\,{}^{x}dU$ auch $= {}^{x}d\,{}^{y}dU$ seyn muſs, nach dem Lehrsatze §. 1., wenn U eine Funktion von x und y ist, und auch nach dem Zusatze §. 13, wenn U nur noch eine Scheinfunction von y wäre: so ist sogleich gewiſs, daſs man

zum Beispiel ${}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}dU$ ansetzen, nämlich das erste dem U nächste ${}^{x}d$ mit dem ihm nächsten ${}^{y}d$ die Stelle wechseln kann.

Da nun eben so auch ferner ${}^{y}d\,{}^{x}d\,({}^{y}dU) = {}^{x}d\,{}^{y}d\,({}^{y}dU)$ bleibend seyn mufs (wiederum nach dem Lehrsatze §. 1., wenn $({}^{y}dU)$ noch eine Function von x und y ist, wo nicht, doch nach dem Zusatze §. 13.): so haben wir nunmehr schon
${}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU$, und sind auch völlig versichert, dafs wir auch fernerhin jedes ${}^{x}d$, dem noch ein ${}^{y}d$ zur Linken stände, in dessen Stelle hinauf treiben könnten, bis wir ${}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU$ erhalten hätten.

Eben so einleuchtend ist es, dafs man durch umgekehrte Anwendung des Lehrsatzes 1, jedes ${}^{y}d$ hinauf und jedes ${}^{x}d$ herab treiben könnte, bis man ${}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU$ erhalten hätte.

Dafs nun eben dieses Hinauf- und Hinabtreiben, welches hier nur Beispielsweise an einem fünften Differentiale dargethan ist, auf jedes $(m + n)^{te}$ anwendbar sey, liegt eben durch dieses Beispiel so deutlich vor Augen, dafs die Ueberzeugung durch den Schematismus einer allgemeinen Induction mühseliger allerdings, aber noch heller und einleuchtender nicht gemacht werden könnte.

§. 19. Für diejenigen Gründe des Integrirens (welche in Teutschland noch bis jetzt die herrschenden sind, und vielleicht durch dieses Lehrbuch auch aufs neue gegen alle Usurpationen uns gesichert bleiben werden), nach welchen man aus der wahrhaften Form und Bedeutung eines Differentials auf dessen Integral unmittelbar zurück zu schliefsen sucht, sind gerade diejenigen Ausdrücke der obigen Lehrsätze am besten geeignet, deren ich mich bedient habe, und um so lieber bedienen mufste, da auch die Be-

weise dadurch an Deutlichkeit und Kürze gewinnen konnten.

Wie man eben diese Lehren auch vermittelst der Differentialquotienten ausdrücken könne, liegt durch die hier gebrauchte Beziehung der Partialdifferentiale allenthalben vor Augen. Dafs alle Resultate, die man ohne Integrirung durch die Differentialmethode allein schon gewinnt, vermittelst der Differentialquotienten meistens am deutlichsten und kürzesten geschlossen werden, haben wir schon oben erinnert; zugleich aber auch hinzugefügt, dafs für einige derselben wiederum die Beibehaltung der Differentialform am bequemsten ist. Ein neues Beispiel dafür liefert die folgende Anwendung des zweiten Lehrsatzes, welcher allgemein ist, weil er den ersten für m und n $= 1$, mit umfafst.

§. 20. Wenn, wie vorhin, U eine Function von zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen x und y ist, und diese mit constanten Differentialen dx und dy belegt sind: so hat man

$$dU = \begin{cases} 1 \cdot {}^{x}dU \\ + 1 \cdot {}^{y}dU \end{cases},$$

$$\text{folglich } ddU = \begin{cases} {}^{x}d\,{}^{x}dU \\ + {}^{y}d\,{}^{x}dU \\ + {}^{x}d\,{}^{y}dU \\ + {}^{y}d\,{}^{y}dU \end{cases} \overset{\S.\ 17}{=} \begin{cases} 1 \cdot {}^{x}d\,{}^{x}dU \\ + 2 \cdot {}^{x}d\,{}^{y}dU \\ + 1 \cdot {}^{y}d\,{}^{y}dU \end{cases},$$

$$\text{und } dddU = \begin{cases} {}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU \\ + {}^{y}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU \\ + 2\,{}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}dU \\ + 2\,{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU \\ + {}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU \\ + {}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU \end{cases} = \begin{cases} 1 \cdot {}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU \\ + 3 \cdot {}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}dU \\ + 3 \cdot {}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{x}dU \\ + 1 \cdot {}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU \end{cases} \text{ u. s. w.}$$

§. 21. Das Gesetz der numerischen Coefficienten und der übrigen binomischen Combinationen ist hiermit schon so deutlich begründet, dafs man ohne

förmliche allgemeine Induction versichert ist, es müsse

$$d^nU = 1.{}^xd^nU + \frac{n}{1}.{}^xd^{n-1}.{}^yd^1U + \frac{n.n-1}{1.2}.{}^xd^{n-2}.{}^yd^2U + \ldots \text{ seyn.}$$

Der Kürze wegen wird schon ${}^xd^2$ statt ${}^xd\,{}^xd$, und ${}^xd^3$ statt ${}^xd\,{}^xd\,{}^xd$ geschrieben, eben so wie bei den Totaldifferentialen, d^2U statt ddU geschrieben wird, u. s. w.

Anmerkung.

§. 21. Hätte ich den bei den neueren Analysten gewöhnlichen Vortrag dieser Lehren befolgen wollen, so würde ich einige Erleichterungen desselben aus des Hrn. Hofr. Mayer Differentialrechnung zu benutzen gehabt haben. Aber man hat hier gar nicht nöthig, eine allgemeine Reihenform vorauszusetzen. Wir haben lediglich aus dem Satze geschlossen, daſs jede Functionsdifferenz sich ergeben muſs, wenn man von der belegten Function die unbelegte abzieht. Eulers ähnliche, sehr richtige Schlüsse (*Calc. differ.*) muſsten aber schon deſshalb sehr versteckt bleiben, weil sie durch seine unbequeme Bezeichnung der partiellen Differentiale nicht in der Kürze sich darstellen lieſsen. Karsten (*Mathesis sublimior.* Sect. XXVI.) ist, der bequemern Bezeichnung ungeachtet, nicht deutlich geworden, weil er unnöthiger Weise die endlichen Differenzen beibehält.

Was man in Hinsicht gleichartiger und ungleichartiger Functionen noch hinzuzufügen pflegt, wird rathsamer für die Integralrechnung verschoben.

Dreiundzwanzigstes Capitel.

Taylors Reihe, auf zwei- und mehrfach variable Functionen erweitert.

Lehrsatz.

§. 1. **Für Functionen U mit zwei belegten Variabeln x und y, hat man**

$$\overset{(x+\Delta x,\, y+\Delta y)}{U} = U + \left\{\begin{array}{l} \frac{{}^{x}dU}{dx}\Delta x \\ + \frac{{}^{y}dU}{dy}\Delta y \end{array}\right. + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{{}^{x}d\,{}^{x}dU}{dx\,dx}\Delta x\,\Delta x \\ + 2\,\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\,dy}\Delta x\,\Delta y \\ + \frac{{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dy\,dy}\Delta y\,\Delta y \end{array}\right. + \frac{1.1}{2\;3}\left\{\begin{array}{l} \frac{{}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{x}dU}{dx\,dx\,dx}\Delta x^3 \\ + 3.\frac{{}^{x}d\,{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\,dx\,dy}.\Delta x^2\Delta y \\ + 3\,\frac{{}^{x}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dx\,dy\,dy}.\Delta x\,\Delta y^2 \\ + \frac{{}^{y}d\,{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dy\,dy\,dy}\Delta y^3 \end{array}\right. + \ldots$$

Beweis.

§. 2. In Cap. XV. §. 11. haben wir die merkwürdige Reihe

$$\mathfrak{d}U = dU + \frac{1}{2}\,ddU + \frac{1}{1.2}\,d^3U + \frac{1}{2.3.4}\,d^4U + \ldots$$

als formenvollständiges Differential einer beliebigen Function U, welches wir durch das ausgezeichnete $\mathfrak{d}$ anzudeuten pflegen; dagegen die schlechthin geschriebenen d in der rechten Seite der Gleichung nur die Gröfsen der genauen Differentiale andeuten; dU die Gröfse des ersten, ddU die Gröfse des zweiten Differentials der Function U, u. s. w.

Sey nun U eine Function von 2 Variabeln, so hat man diese Totaldifferentiale vermittelst des partiellen ausgedrückt (Cap. XX, §. 20 und 21.)

$$dU = \begin{cases} {}^x dU \\ {}^y dU \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} {}^x d\, {}^x dU \\ 2\, {}^x d\, {}^y dU \\ +\, {}^y d\, {}^y dU \end{cases} + \frac{1}{2 \cdot 3} \begin{cases} {}^x d\, {}^x d\, {}^x dU \\ +\, 3\, {}^x d\, {}^x d\, {}^y dU \\ +\, 3\, {}^x d\, {}^y d\, {}^y dU \\ +\, {}^y d\, {}^y d\, {}^y dU \end{cases} + \cdots$$

folglich auch $dU = \begin{cases} \dfrac{{}^x dU}{dx}\, dx \\ \dfrac{{}^y dU}{dy}\, dy \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} \dfrac{{}^x d\, {}^x dU}{dx\, dx}\, dx\, dx \\ +\, 2\, \dfrac{{}^x d\, {}^y dU}{dx\, dy}\, dx\, dy \\ +\, \dfrac{{}^y d\, {}^y dU}{dy\, dy}\, dy\, dy \end{cases}$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \begin{cases} \dfrac{{}^x d\, {}^x d\, {}^x dU}{dx\, dx\, dx}\, dx\, dx\, dx \\ +\, 3\, \dfrac{{}^x d\, {}^x d\, {}^y dU}{dx\, dx\, dy}\, dx\, dx\, dy \\ +\, 3\, \dfrac{{}^x d\, {}^y d\, {}^y dU}{dx\, dy\, dy}\, dx\, dy\, dy \\ +\, \dfrac{{}^y d\, {}^y d\, {}^y dU}{dy\, dy\, dy}\, dy\, dy\, dy \end{cases} + \cdots\cdots$$

Da nun dieses immer noch so gut, wie die erste für dU angesetzte Reihe, das formenvollständige Differential des T ist: so ist es auch die vollständige Form einer beliebigen endlichen Differenz, welche durch eine Belegung mit Δx und Δy statt dx und dy entstehen würde. W. z. e.

§. 3. Zusatz. Aus diesem Beweise liegt vor Augen, wie man Taylors Reihe auch auf drei und noch mehre Variabeln erweitern kann.

Vierundzwanzigstes Capitel.

Gröfste nnd kleinste Werthe zweifach variabler Functionen.

§. 1. Sollen die Eminenzien einer Function $\overset{(x,y)}{U} = U$ vermittelst der im vorigen Capitel erweiterten Taylorschen Reihe $\overset{(x+\Delta y,\, y+\Delta y)}{U} =$

$$U + \begin{cases} \frac{{}^{x}dU}{dx}\Delta x \\ + \frac{{}^{y}dU}{dy}\Delta y \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{{}^{x}d\,{}^{x}dU}{dx\,dx}\Delta x\Delta x + \ldots \\ +2\frac{{}^{y}d\,{}^{x}dU}{dy\,dx}\Delta y\Delta x \\ \frac{{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dy\,dy}\Delta y\Delta x \end{cases}$$

die wir kürzer durch

$$U + \begin{cases} P\Delta x \\ +Q\Delta y \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} R\Delta x\,\Delta x + \ldots \\ +2S\Delta y\Delta x \\ T\Delta y\Delta y \end{cases}$$

schreiben wollen, gefunden werden:

so ist es diesem Gange der Untersuchung angemessen, nicht geradezu einzeln $P\Delta x = 0$ und $Q\Delta y = 0$ zu fordern; sondern nur zu fordern, dafs die algebraische Summe aus beiden, also $P\Delta x + Q\Delta y = 0$ sey, also $\frac{P}{Q} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sey, das heifst, die x und y, welche im P und Q stecken, müssen auf diejenigen Werthe eingeschränkt werden, bei welchen dieser Forderung Genüge geschieht; wodurch dann nur so viel gewifs ist, dafs bei diesen Werthen des x und y die Function U irgend einen eminenten Werth hat.

§. 2. Ob es ein eminenter Wendungswerth, oder ein gröfster, oder ein kleinster sey, darüber mufs zuvörderst das nächstfolgende Glied der Reihe be-

fragt werden, nachdem man es auf die durch obige Forderung bestimmten Werthe des x und y eingeschränkt hat. Wenn durch diese Einschränkung sich R = D, S = E und T = F ergibt, und das Aggregat $D\Delta x \Delta x + 2E\Delta y \Delta x + F\Delta y \Delta y = G$ gesetzt wird: so kommt es darauf an, zu erfahren, ob dieser Ertrag ein G = o oder ein (+)G, oder ein (−)G sey!

§. 3. Da nun sowol $\frac{F}{\Delta x \Delta x}$ als $\frac{G}{\Delta y \Delta y}$ dem G gleichbezeichnet bleibt: so mufs auch

$$D + 2E\frac{\Delta y}{\Delta x} + F\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} ::: D\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 2E\frac{\Delta x}{\Delta y} + F \text{ seyn,}$$

das heifst, es müssen auch diese beiden Aggregate einander gleichbezeichnet seyn. (Woraus aber nicht gefolgert werden kann, dafs allemal D ::: F seyn müsse!)

§. 4. Da irgend eine Abhängigkeit zwischen den beiden Variabeln x und y nicht vorausgesetzt wird, also auch für den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ noch keine Gröfse bestimmt ist, vielmehr in der obigen Reihe §. 1. an und für sich, Δx und Δy ganz beliebig, und einzeln sollen gewählt werden können, wie man will; bei ihrer gewöhnlichen Anwendung auf das Auffinden der Eminenzien aber nur verlangt wird, sowohl Δx als Δy klein genug zu wählen, um durch jedes Glied der Reihe für das $\mp$ des Aggregates aus ihm selbst und der ganzen nachfolgenden Reihe entscheiden zu können: so kann man allerdings auch neben einander

1) $\Delta x = dx = \frac{y^o}{\infty} = o$, und das Δy noch von einer gehörig kleinen endlichen Gröfse gewählt fordern, oder auch

2) $\triangle y = dy = \frac{y^o}{\infty} = o$, und das $\triangle x$ noch von einer gehörig kleinen endlichen Gröſse gewählt fordern.

§. 5. Im ersten Falle hat man

$$D + 2E\frac{\triangle y}{\triangle x} + \frac{\triangle y^2}{\triangle x^2} = D + 2E\infty + F\infty^2$$

$$::: F\infty^2 ::: F, \text{ und}$$

auch $D\frac{\triangle x^2}{\triangle y^2} + 2E\frac{\triangle x}{\triangle y} + F = o + 2E.o + F ::: F$

Im zweiten Falle hat man

$$D + 2E\frac{\triangle y}{\triangle x} + F\frac{\triangle y^2}{\triangle x^2} = D + 2E.o + F.o.o ::: D$$

und auch $D\frac{\triangle x^2}{\triangle y^2} + 2E\frac{\triangle x}{\triangle y} + F = D\infty^2 + 2E\infty + F$

$$::: D.\infty^2 ::: D$$

Zugleich aber liegt hiermit vor Augen, daſs dieses Verfahren, dessen man sich mit Lagrange gegenwärtig zu bedienen pflegt, schlechterdings nichts anders als das Eulerische einliefern kann, welches die Function mit zwei Variabeln, zweimal als Function mit einer Variabeln betrachtet; wofür man dann aber Taylors Reihe auf zwei Variabeln erweitert gar nicht benutzen kann, wie es doch des Hrn. Lagrange Absicht gewesen seyn muſs, indem er, auch nachdem man D und F einander gleichbezeichnet gefunden habe, überdies noch auf die Gröſse E geachtet wissen will.

§. 6. Obgleich ich noch mehre ähnliche allgemeine Erörterungen, und namentlich auch in Hinsicht der einseitigen Eminenzien gerne mittheilen möchte: so muſs ich doch der nöthigen Kürze wegen hier damit abbrechen, und mich auf die wirkliche Behandlung einer einzelen Aufgabe einschränken,

wozu ich aber die allgemeinste von denen ergreife, welche ich vorfinden kann, und, auf welche namentlich auch Hr. Lacroix in seinem *Traité élémentaire de Calcul differentiel*, §. 136, des Hrn. Lagrange Methode angewandt hat.

Aufgabe.

§. 7. Die gegebene Gröſse a in drei solche $x + y + z = a$ zu theilen, daſs $U = x^m y^n z^p$ für gegebne m, n und p, ein Gröſstes (oder Kleinstes) sey.

Auflösung.

§. 8. Da $z = a - x - y$ seyn muſs, so hat man $U = x^m y^n (a - x - y)^p$ als eine Function von zwei Variabeln x und y zu betrachten, deren Gesammtdifferential $dU = {}^x dU + {}^y dU$ seyn muſs; und uns

$$\frac{{}^x dU}{dx} = mx^{m-1} . y^n (a - x - y)^p - x^m y^n . p (a - x - y)^{p-1}$$

$$\frac{{}^y dU}{dy} = ny^{n-1} . x^m (a - x - y)^p - x^m y^n . p (a - x - y)^{p-1}$$

gibt.

Soll U ein Gröſstes oder Kleinstes, oder auch nur ein eminenter Wendungswerth seyn: so muſs man das erste Glied der Taylorschen Reihe, $\frac{{}^x dU}{dx} \triangle x + \frac{{}^y dU}{dy} \triangle y = 0$ haben; für das vorgegebne U also

$$\left[(mz - px)y \triangle x + (nz - py)x \triangle y\right] . R = 0 \ldots\ldots\ldots (\sigma)$$

wenn wir der Kürze wegen $z = a - x - y$ gebrauchen, auch $R = x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1}$ bedeuten lassen.

§. 9. Wir mögen nun die mit der Gleichung (♂) geforderte Vernullung, durch ihren zweiten Factor R, oder durch ihren übrigen ersten Factor geleistet verlangen: so müssen, dieser Forderung wegen, die beiden Variabeln x und y nicht etwa überhaupt aufhören, von einander unabhängig zu seyn. Aber da diese Forderung wiederum eine Gleichung zwischen x und y, und einer von der gegebnen Function U abhängigen dritten Gröfse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ausmacht: so müssen diejenigen Werthe des x und y, durch welche dieser Forderung Genüge geschieht, allerdings von einander abhängig seyn.

§. 10. Soll die Vernullung durch den ersten, eingeklammerten Factor bewirkt werden (und der zweite Factor R würde, weil er, um vernullt zu werden, von den drei gesuchten Gröfsen x, y, z, wenigstens eine = o genommen verlangt, nur noch eminente Wendungswerthe geben können): so mufs

$$\text{auch } mz - px + (nz - py)\,\frac{x\,dy}{y\,dx} = o \text{ seyn;}$$

denn statt des $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geradezu ein $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ zu befolgen, ist durchaus rathsam, um nicht nur aller unnöthig mühseligen Arbeiten überhoben, sondern auch vor oftmals unrichtigen Resultaten gesichert zu seyn. (Ohne diese Befolgung würde ja die eben erwähnte dritte Gröfse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ äufserst schwankend bleiben, nur durch übereilte Schlüsse leicht bestimmbar scheinen!)

§. 11. Wenn die eben erwähnte Abhängigkeit zwischen y und x, wirklich hinreichend seyn soll, um mit Hülfe der gegebnen Gleichung $x + y + z = a$, durch welche $z = a - x - y$

schon bestimmt ist, nun auch y als ein $= N.x$ zu bestimmen, dessen Factor N lediglich von den gegebnen constanten Zahlen a, m, n und p abhängig wäre: so würde, unter dieser Voraussetzung, allerdings $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = 1$ seyn müssen, folglich

$$mz + nz - px - py = 0 \text{ seyn,}$$

also $(m+n)z = p(x+y) = p(a-z)$ seyn müssen, folglich erstens $z = \frac{p}{m+n+p}\, a$ sich ergeben.

§. 12. Da es vor Augen liegt, daſs wir auf dieselbe Weise

zweitens auch $y = \frac{n}{m+n+p} \cdot a$, und

drittens auch $x = \frac{m}{m+n+p} \cdot a$ finden würden,

wenn wir zweitens $y = a - x - z$, also U als eine Function der beiden Veränderlichen, x und z betrachtet, folglich $\frac{{}^x dU}{dx} + \frac{{}^z dU}{dz} = 0$ verlangt hätten, und drittens $x = a - y - z$ gesetzt, also U als eine Function der Veränderlichen y und z betrachtet, folglich $\frac{{}^y dU}{dy} + \frac{{}^z dU}{dz} = 0$ verlangt hätten: so ist uns hiermit allerdings gewiſs, daſs

$$x = \frac{ma}{m+n+p};\; y = \frac{na}{m+n+p} \text{ und } z = \frac{pa}{m+n+p}$$

gesetzt werden muſs, wenn jeder von diesen drei Theilen des a, so viel auf denselben allein genommen ankommt, einen eminenten Werth des U bewirken soll.

§. 13. Hiemit sind wir nun veranlaſst, zuvörderst die Frage aufzuwerfen, was für eine partielle Eminenz ein jeder von diesen drei Theilen des a zu

bewirken vermag? Denn wenn z. B. jeder derselben ein partielles Maximum darbietend wäre: so wäre es dadurch auch schon gewiſs, daſs uns diese drei Werthe, mit einander verbunden, ein collectives Gesammt-Maximum einliefern müſsten.

§. 14. Sogleich als wir glaubten gefunden zu haben, daſs der Forderung $\frac{{}^{x}dU}{dx}\Delta x + \frac{{}^{y}dU}{dy}\Delta y = o$, besser und strenger ausgedrückt, der Forderung $\frac{{}^{x}dU}{dx}dx + \frac{{}^{y}dU}{dy}dy = o$, also am kürzesten gesprochen, der Forderung ${}^{x}dU + {}^{y}dU = o$, durch $z = \frac{pa}{m+n+p}$ Genüge geschehe: so konnten wir auch schon die Frage aufwerfen, ob die eine Variable z durch diesen ihren Werth ein gröſstes oder kleinstes U, so viel es an ihr ist, zu befördern geeignet sey!

§. 15. Eben so nun, wie man zur Entscheidung über diese Frage bei Functionen mit einer Variabeln, das zweite Glied der Taylorschen Reihe zu vernehmen pflegt, eben so wird man auch hier bei zwei Variabeln, das hier vorhandene zweite Glied

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{{}^{x}d\,{}^{x}dU}{dx\,dx}\cdot\Delta x\,.\,\Delta x\\ 2\,\frac{{}^{x}d\,{}^{y}dU}{dx\,dy}\cdot\Delta x\,\Delta y\\ \frac{{}^{y}d\,{}^{y}dU}{dy\,dy}\cdot\Delta y\,\Delta y\end{array}\right.$$

in Anspruch zu nehmen haben, ob es etwa durch seinen verneinten oder bejahten Werth für ein Gröſstes oder Kleinstes schon entscheidend sey!

§. 16. Auch hier, der Kürze und Sicherheit wegen, dx und dy statt Δx und Δy gebraucht, wird

es darauf ankommen,

ob ${}^{x}d^{x}dU + 2\,{}^{y}d^{x}dU + {}^{y}d^{y}dU = G.o.o$ gesetzt,

ein $\begin{matrix}\text{verneintes}\\ \text{bejahtes}\end{matrix}$ G gebe, und dadurch für ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ entscheidend sey!

§. 17. Wenn wir nun diese drei Glieder (welche das Duplum des zweiten Gliedes in der Taylor'schen Reihe ausmachen) aus dem obigen vollständigen

$\frac{{}^{x}dU}{dx} = (myz - pxy)R$, und $\frac{{}^{y}dU}{dy} = (nxz - pxy)\,R$

ableiten wollten: so würden wir in einen mühsamen Calcul gerathen, dessen wir dadurch überhoben werden, daſs wir zuvörderst uns auf Untersuchung derjenigen gröſsten und kleinsten U einschränken, welche zum

$\frac{{}^{x}dU}{dx} + \frac{{}^{y}dU}{dy} = (myz - pxz + nxz - pxy).\,R = o$

lediglich die Vernullung des ersten Factors erfordernd, von dem zweiten Factor $R = x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}$ unabhängig bestimmt werden können.

§. 18. Nur müssen wir hiebei es ja bedenken, daſs wir nun nicht fernerhin mit den vollständigen $\frac{{}^{x}dU}{dx}$ und $\frac{{}^{y}dU}{dy}$, sondern nur mit deren Factoren $\frac{{}^{x}dU}{R.dx}$ und $\frac{{}^{y}dU}{R.dy}$ es zu thun haben. Dieses in der Kürze durch das kleine u, im

${}^{x}du + {}^{y}du = (myz - pxy)dx + (nxz - pxy)dy$

angedeutet, kommt es nun allerdings wieder darauf an, zu wissen, ob $d({}^{x}du + {}^{y}du) = g.o.o$ gefunden, und dann dessen mit x und y veränderliche Gröſse g, auf diejenigen Werthe des x und y, bei

welchen $\frac{{}^{x}du}{dx} + \frac{{}^{y}du}{dy} = o$ ist, eingeschränkt, ein verneintes oder bejahtes g gebe!

§. 19. Hiebei aber verfährt man sehr unrichtig, wenn man fernerhin das zweite Glied der Taylorschen Reihe in seiner obigen dreigliedrigen Form befolgt. Bei jener Form wird ja vorausgesetzt, dafs allemal ${}^{y}d\,{}^{x}dU = {}^{x}d\,{}^{y}dU$ sey, welches nur richtig ist, so lange man die Function U vollständig beibehält! Nachdem wir uns dagegen auf ${}^{x}du + {}^{y}du$ eingeschränkt haben, können wir als allgemein richtig nur behaupten, dafs
$d({}^{x}du + {}^{y}du) = {}^{x}d\,{}^{x}du + {}^{y}d\,{}^{x}du + {}^{x}d\,{}^{y}du + {}^{y}d\,{}^{y}du$
seyn mufs; da wir dann für unsere Aufgabe

$${}^{x}d\,{}^{x}du = (-my - py)\,dx\,dx$$
$${}^{y}d\,{}^{x}du = (mz - my - px)\,dx\,dy$$
$${}^{x}d\,{}^{y}du = (nz - nx - py)\,dy\,dx$$
$${}^{y}d\,{}^{y}du = (-nx - px)\,dy\,dy$$

finden, und die Summe aus diesen vier Gliedern = g. o. o genannt, nach dem schon erwähnten $\mp$ des eingeschränkten g-Werthes zu fragen haben. Sehr absichtlich wollen wir nun zeigen, wie dieses für die drei, durch z, durch y und durch x bewirkbaren partiellen Eminenzien bündig geschehen kann.

§. 20. Haben wir zuvörderst, wie in §. 11., gefunden, dafs die Forderung ${}^{x}du + {}^{y}du = o$, ein $z = \frac{p \cdot a}{q}$ verlangt (der Kürze wegen $q = m + n + p$ bedeutend): so wissen wir, dafs

$$a = x + y + z = x + y + \frac{pa}{q},$$

also $y = a - \frac{pa}{q} - x$, folglich $dy = dx$ seyn (also die in §. 11 gebrauchte N ein $N = -1$ seyn) mufs;

folglich für diese, durch $z = \frac{pa}{q}$ bewirkbare partielle Eminenz, sich

$$g.oo = \begin{cases} (-my - py).dx\,dx \\ (-mz + my + px).dx\,dx \\ (-nz + nx + py).dx\,dx \\ (-nx - px).dx\,dx \end{cases}$$ also

$g = -(m+n)z = -(m+n)\frac{pa}{q}$ ergibt, und somit durch $z = \frac{p.a}{q}$ ein von z abhängiges partielles $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ der Function $U = x^m y^n z^p = x^m y^n (a-x-y)^p$ bewirkt wird, wenn $(m+n)\frac{pa}{m+n+p}$ $\begin{matrix}\text{bejaht}\\\text{verneint}\end{matrix}$ gegeben ist; die beiden Variabeln x und y mögen gewählt werden, wie man will, nur dafs sie der bereits für sie bestimmten Functionirung, der gegenseitigen Abhängigkeit $x + y = \frac{m+n}{m+n+p}.a$ Genüge leisten müssen.

§. 21. Da wir nun auf dieselbe Weise finden könnten, dafs ${}^x du + {}^z du = o$ gefordert, uns $y = \frac{na}{m+n+p}$ als einen Werth des y bestimmen müfste, der ein partielles $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ des U bewirken würde, wenn $(m+p).\frac{na}{m+n+p}$ $\begin{matrix}\text{bejaht}\\\text{verneint}\end{matrix}$ gegeben ist; auch ${}^y du + {}^z du = o$ gefordert, uns $x = \frac{ma}{m+n+p}$ als einen Werth des x bestimmen müfste, der ein partielles $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ des U bewirken würde, wenn $(n+p)\frac{ma}{m+n+p}$ $\begin{matrix}\text{bejaht}\\\text{verneint}\end{matrix}$ gegeben wäre: so haben

wir nun vollständig vor Augen, wie z. B. bei bejaht oder absolut gegebenem a, die drei Exponenten m, n und p gegeben seyn müßsten, um z. B. drei partielle Maxima mit einander verbinden zu können. Sehr einleuchtend würde dieses eintreten müssen, wenn alle drei Exponenten bejaht gegeben wären.

Wenn dagegen etwa p verneint gegeben, und in absoluter Gröſse kleiner als m + n gegeben wäre: so würde nur ein verneintes $z = \frac{-pa}{m+n-p}$ der Forderung ${}^{x}du + {}^{y}du = o$ Genüge leisten; und da dann $g = -(m+n) . \frac{-pa}{m+n+p}$ sich bejaht ergeben müſste, so würde durch z nur ein partielles Minimum geliefert werden.

§. 22. Hiemit ist nun allerdings die in §. 9. aufgeworfene Frage bündig und vollständig beantwortet, zugleich aber auch das Bedürfniſs einer fernern Untersuchung eingetreten: ob in solchen Fällen, da die partiellen Eminenzien verschiedenartig, z. B. theils Maxima, theils Minima sind, die Gesammt-Eminenz ein Maximum, oder Minimum, oder ein Wendungswerth sey!

§. 23. Sobald man denjenigen Werth der einen Variabeln, z. B. der z, gefunden hat, bei welchem sie eine Eminenz bewirkt, so kann man auch sogleich finden, wie nun die x und y zu nehmen seyen, um die von ihnen beiden abhängige zweifache Eminenz zu bewirken.

Denn da man mit $z = \frac{p.a}{m+n+p}$ gefunden, zugleich weiſs, daſs $y = \frac{m+n}{m+n+p} a - x$ seyn muſs: so hat man

$U = x^m y^n z^z = x^m \left(\frac{m+n}{q}.a - x\right)^n . \left(\frac{pa}{q}\right)^p$, also

$q^n . q^p . U = x^m \left((m+n)a - qx\right)^n (pa)^p$, und

$$q^n q^p \frac{x dU}{dx} = m x^{m-1}\left((m+n)a - qx\right)^n - x^m . n\left((m+n)a - qx\right)^{n-1} . q$$

$$= \left[m\left((m+n)a - qx\right) - xnq\right] . x^{m-1}\left((m+n)a - qx\right)^{n-1}$$

also $\frac{x dU}{dx} = 0$ vermittelst seines ersten Factors, wenn $x = \frac{ma}{m+n+p}$, folglich $y = \frac{na}{m+n+p}$ genommen wird, dafs wir also auch für x und y dieselben Werthe, wie vorhin erhalten.

§. 24. Um nun endlich auf eine bündige Weise zu erfahren, ob die durch $x = \frac{ma}{q}$, $y = \frac{na}{q}$, und $z = \frac{pa}{q}$ bewirkbare Gesamt-Eminenz der U, ein Maximum oder Minimum sey: so haben wir in dem g.o.o des §. 19., diese drei Werthe mit einem Mahle zu setzen, wodurch wir nun

$$g = \begin{Bmatrix} -mn - pn \\ -mp + mn + pm \\ -np + nm + pn \\ -nm - pm \end{Bmatrix} . \frac{a}{m+n+p} = -\frac{m+n}{m+n+p} pa$$ erhalten.

Hiermit hätten wir also gefunden, dafs die Gesamt-Eminenz

des $U = x^m y^n z^p = x^m y^n (a - x - y)^p$

ein $x = \frac{ma}{m+n+p}$, ein $y = \frac{na}{m+n+p}$ und

ein $z = \frac{pa}{m+n+p}$ erfordert, und ein Maximum / Minimum

sey, je nachdem uns $\frac{m+n}{m+n+p} . pa$ bejaht / verneint gegeben ist.

§. 25. Sey $m = 3$, $n = 1$ und $p = -2$ gegeben, so würde durch $x = \frac{3}{2}a$; $y = \frac{1}{2}a$ und $z = -a$, die Gesammt-Eminenz

$$U = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(-a\right)^{-2} = \frac{27}{16}a^2$$ gefunden, und für ein Minimum erklärt seyn, weil hier

$$\frac{m+n}{m+n+p} \cdot pa = \frac{3+1}{3+1-2} \cdot -2 \cdot a = \frac{4}{2} \cdot -2 \cdot a = -4a$$

eine verneinte Gröfse ist. (Warum dieses U gleichwohl kein Minimum ist, werden wir in §. 29. erklären.)

§. 26. Euler und Lagrange würden, um diese Aufgabe zu lösen, $\frac{{}^x dU}{dx} \cdot \Delta x = o$ und $\frac{{}^y dU}{dy} \cdot \Delta y = o$, folglich auch $\frac{{}^x dU}{dx} \Delta x = \frac{{}^y dU}{dy} \Delta y$ fordern, und dadurch allerdings ebenfalls $x = \frac{ma}{m+n+p}$, und $y = \frac{na}{m+n+p}$, folglich auch $z = \frac{pa}{m+n+p}$, gerade wie wir, finden.

Wenn dann aber für das Beispiel in §. 25., Euler sein $\frac{{}^x d\, {}^x dU}{dx\, dx} = 1{,}125$, sein $\frac{{}^y d\, {}^y dU}{dy\, dy} = -3{,}375$ gefunden hätte: so würde er vermuthlich sagen, dafs hier in Hinsicht des y zwar ein Maximum, in Hinsicht des x aber ein Minimum sich ergebe, beide also nicht übereinstimmig zu einem Maximo oder Minimo behülflich seyn könnten.

Lagrange behauptet im Voraus, dafs für die durch $\frac{{}^x dU}{dx} \cdot \Delta x = o$ und $\frac{{}^y dU}{dy} \Delta y = o$ bestimmten Werthe des x und y, $\frac{{}^x d\, {}^x dU}{dx\, dx} = D$, und $\frac{{}^y d\, {}^y dU}{dy\, dy} = F$

gefunden, D und F beide $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{verneint}}{\text{bejaht}}$ sich ergeben müssen, wenn U ein $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$ solle seyn können. Ueberdiefs aber müsse man noch $2\,\frac{y d^x dU}{dy\,dx} = 2E$ finden, und prüfen, ob auch $D.F > EE$ sey!

§. 27. In dem dritten Anhange zu der Abhandlung, *Formulae radii osculatoris, et ventilatae et diligentius, quam fieri solet, explicatae, Dresdae* 1825; denke ich dargethan zu haben, dafs dieser Zusatz zur Eulerischen Methode, bei Lagrange durch drei Fehlschlüsse entstanden ist, und selbst auch dessen ungleich deutlichere Motivirung bei Hrn. Lacroix eine falsche Conversion ausmacht; übrigens dieser Zusatz zur Eulerischen Methode theils ganz überflüssig, theils aber auch schädlich ist, weil dadurch einige, nach Eulers Methode richtig aufgefundene Maxima und Minima als nicht vorhanden zurückgewiesen würden.

Es widersteht ja dem gesunden Menschenverstande, dafs, auch nachdem durch Eulers Methode vermittelst gleichbezeichneter D und F entschieden ist, wie man zwei partielle Maxima, oder zwei partielle Minima mit einander zu verbinden habe, es noch auf die Frage, ob auch $DF > EE$ sey, ankommen solle, ob dadurch wirklich ein collectives Maximum oder Minimum entstehen könne!

§. 30. Wenn in dem dreigliedrigen Aggregate $D \triangle x \triangle x + 2E \triangle y \triangle x + F \triangle y \triangle y = G \triangle x \triangle x$, die beiden Gröfsen D und F gleichbezeichnet seyn sollen, wie es Lagrange sich als nothwendig erwiesen glaubt, bevor er die Frage aufwirft, ob G bejaht oder verneint sey; und gleichwohl dieses Zei-

chen des G noch vom E abhängig seyn sollte: so müſste E **wenigstens** so groſs seyn, daſs $G = o$, also $2E\,\Delta y\,\Delta x = -D\,\Delta x\,\Delta x - F\,\Delta y\,\Delta y$ wäre.

Bekanntlich muſs nun, wenn das $\mp$ des Gliedes G in der Taylorschen Reihe für ein Maximum oder Minimum entscheidend seyn soll, Δx und Δy so klein gewählt werden; daſs das Glied G von der Summe aller etwa noch übrigen Glieder niemals übertroffen wird, **auch** das Zeichen des G nicht fernerhin verändert werde, wenn man Δx oder Δy, oder beides, **noch kleiner** annähme.

Mag nun aber auch, um dieses zur sichern Entscheidung nothwendige Erforderniſs erreicht zu haben, Δx und Δy noch so klein gewählt seyn: so kann doch, auch wenn man denen Mathematikern zu gefallen, welche das $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy} = \frac{o}{o}$ verabscheuen, Δx und Δy immer noch von einiger Gröſse gedacht verlangt, sehr offenbar

1) Δx noch so vielmal kleiner als Δy gefordert werden, daſs das Zeichen des G sich ändern müſste, wenn nicht in absoluter Gröſse, $2E\,\Delta y\,\Delta x < F\,\Delta y\,\Delta y$ wäre; und eben so kann

2) Δy so vielmal kleiner als Δx gedacht werden, daſs das Zeichen des G sich ändern müſste, wenn nicht in absoluter Gröſse $2E\,\Delta y\,\Delta x < D\,\Delta x\,\Delta x$ wäre.

Da demnach in absoluter Gröſse das mittlere Glied $2E\,\Delta y\,\Delta x$ kleiner als jedes der beiden äuſsern einzeln genommen seyn muſs: so kann es in dem Zeichen der äuſsern Gliedersumme $(\mp) D\,\Delta x\,\Delta x + (\mp) F\,\Delta y\,\Delta y$ keine Aenderung bewirken, wo man mit **Euler** gefordert hat, daſs D

und F einander gleichbezeichnet seyn sollen, mit Lagrange es erwiesen glaubt, daſs sie gleichbezeichnet seyn müssen.

§. 29. Hiemit völlig überzeugt, daſs das Kriterium des Hrn. Lagrange unstatthaft ist, entsteht uns nun die merkwürdige Frage, woher es komme, daſs das in §. 25. nach dortigen Schlüssen aufgefundene Minimum gleichwohl kein Gesammt-Minimum ist! Es ist dieses eine Frage, die allen hin und her versuchten Beantwortungen der Mathematiker gerade eben so Hohn sprechen würde, als es die berüchtigte Aufgabe über einen durch die durchlochte Erde fallenden Körper gethan hat, bis ich meinen schon in Vorerinnerung VII. §. 8. erwähnten Satz dabei beachtet hatte, daſs man bei Untersuchungen, wo endliche Gröſsen stetig zu $= 0$ übergehend gebraucht werden, auch dem Gesetze der Stetigkeit gemäſs zwischen $+0$ und -0 unterscheiden müsse. Eben dadurch wird es uns nun auch gelingen, die vorgelegte Frage befriedigend zu beantworten, und zugleich über die ganze Anwendung der Taylorschen Reihe auf eminente Werthe mehrfach variabler Functionen ein völliges Licht zu verbreiten.

§. 30. Es ist eine sehr wesentliche Verschiedenheit, ob man mit Euler die partiellen Maxima und Minima aufsuchend, $\frac{{}^{x}dU}{dx}\triangle x = 0$, und $\frac{{}^{y}dU}{dy}\triangle y = 0$, einzeln gesetzt verlangt, oder ob man Taylors Reihe für zwei Variable befolgen will, und daher nur die algebraische Summe $\frac{{}^{x}dU}{dx}\triangle x + \frac{{}^{y}dU}{dy}\triangle y = 0$ zu fordern hat!

Denn eben darum, weil es bei allen endlichen Werthen des $\frac{{}^x dU}{dx} = P$ und $\frac{{}^y dU}{dy} = Q$ ungemein verschieden ist, ob man es mit diesen von einander unabhängigen P und Q, oder ob man es mit $P + Q = o$, also mit $P = -Q$ und $Q = -P$ zu thun hat: so müssen ja auch diejenigen Werthe des x und y, welche $P = o$, und $Q = o$ geben, so beschaffen seyn, dafs sie durch stetige Veränderung der x und y erreicht gedacht, im letzten Falle, da $P + Q = o$ verlangt wurde, ein $P = \mp o$, und dagegen ein $Q = \pm o$ geben, nämlich zwei verschieden bezeichnete olen geben müfsten.

Nun war ich zwar in §. 8. von der Forderung ausgegangen, dafs die Summe $\frac{{}^x dU}{dx} \triangle x + \frac{{}^y dU}{dy} \triangle y = o$ seyn solle; da ich aber die dadurch zwischen den Gröfsen x, y, $\triangle y$ und $\triangle x$ entstandene Abhängigkeit in §. 13. für hinreichend annahm, um $y = Nx$ vermittelst eines constanten N zu bestimmen: so mufsten nun durch diese Annahme, sammt jener Forderung, und der gegebenen Gleichung $x + y + z = a$, alle drei Gröfsen x, y, z gerade eben so bestimmt werden, als wenn ich mit Euler $\frac{{}^x dU}{dx} = o$ und $\frac{{}^y dU}{dy} = o$, folglich auch $\frac{{}^x dU}{dx} = \frac{{}^y dU}{dy}$ gefordert und gebraucht hätte. (Daher man auch die ganze Rechnung von §. 13. an bis zu §. 25. hin als eine vollständige Durchführung dieser Eulerischen Forderungen betrachten kann.)

§. 31. Wären wir dagegen dem Satze getreu geblieben, dafs wir zur Befolgung der Taylorschen Reihe weiter nichts zu fordern berechtigt sind, als

daſs $\frac{{}^x dU}{dx}\Delta x + \frac{{}^y dU}{dy}\Delta y = o$ seyn muſs: so würde dann ihr zweites Glied, und jedes folgende, nichts anders angeben können, als daſs es ebenfalls $= o$ sey. Obgleich dieses für sich selbst schon ganz einleuchtend ist: so will ich es doch zum Ueberfluſs für das zweite Glied noch auf folgende Weise darthun.

Wenn $\frac{{}^x dU}{dx}\Delta x = -\frac{{}^y dU}{dy}\Delta y$ seyn soll, so muſs auch $\frac{{}^x d\,{}^x dU}{dx\,dx}.\Delta x\,\Delta x = -\frac{{}^x d\,{}^y dU}{dx\,dy}\Delta y\,\Delta x$ seyn. Und da dann auch $\frac{{}^y dU}{dy}\Delta y = -\frac{{}^x dU}{dx}\Delta x$ seyn soll, also auch $\frac{{}^y d\,{}^y dU}{dy\,dy}.\Delta y\,\Delta y = -\frac{{}^y d\,{}^x dU}{dy\,dx}\Delta x\,\Delta y$ seyn muſs; so liegt es als eine Folge aus der Forderung $\frac{{}^x dU}{dx}\Delta x + \frac{{}^y dU}{dy}\Delta y = o$ vor Augen, daſs im zweiten Gliede der Taylorschen Reihe die Summe aus ihrem ersten und dritten Gliede $\frac{{}^x d\,{}^x dU}{dx\,dx} + \frac{{}^y d\,{}^y dU}{dy\,dy}$, gerade die Gegengröſse des zweiten Theiles $2\frac{{}^y d\,{}^x dU}{dy\,dx}$ ausmachen muſs.

§. 32. Ueberdies aber ist es, wie schon gesagt, allgemein einleuchtend: durch die einzige Forderung, daſs $\frac{{}^x dU}{dx}\Delta x + \frac{{}^y dU}{dy}\Delta y = o$ seyn soll, wird über die Abhängigkeit des x und y von einander so wenig bestimmt, daſs auch jedes fernere Differential dieser vernullten Summe fernerhin $= o$ sich ergeben muſs, also vermittelst der Taylorschen Reihe über die durch einige x und y erreichbaren Eminenzien des U nichts bestimmt werden kann. Obgleich nun hie-

mit die Erwartung fehlgeschlagen ist, durch eine consequente Befolgung der Taylorschen Reihe für zweifach variable U vielleicht einige Eminenzien zu finden, welche der Eulerischen Methode entgehen möchten: so haben sich doch bei meiner hier mitgetheilten Untersuchung manche beachtungswerthe Ansichten ergeben; und überdiefs ist es etwas werth, dadurch aufs neue überzeugt zu seyn, dafs es ein unstatthaftes Unternehmen des Hrn. Lagrange war, für Eulers Methode einen Zusatz aus Taylors Reihe für zweifach variable Functionen hernehmen zu wollen.

Fünfundzwanzigstes Capitel.

Wenn eine Function des x für einen endlichen Werth des x sich unendlich grofs ergibt, auch den etwanigen endlichen Theil dieses ihres Werthes zu finden.

§. 1. Nur bei einer gebrochenen Function $\frac{A}{\mathfrak{N}}$, oder $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}$, wo auch $\mathfrak{Z}$ wie $\mathfrak{N}$ eine Function von x ist, kann es vorkommen, dafs sie ein $\overset{x=a}{\left(\frac{A}{\mathfrak{N}}\right)} = \frac{A}{0}$ oder ein $\overset{x=a}{\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}\right)} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ gibt; durch a den endlichen Werth des x bezeichnet, bei welchem sich das Unendlich-

grofse ergibt, wobei übrigens gar häufig auch $a = o$ seyn mag.

Indem man diesen unendlich grofsen Werth dadurch erhält, dafs man die x plötzlich $= a$ setzt, so mufs der endliche Theil des Werthes versteckt bleiben; und nun wollen wir zeigen, wie er durch gehörige Benutzung der Differentialmethode zu finden sey. Diese Untersuchung ist meines Erachtens so neu, dafs es rathsam scheint, durch einzelne Beispiele dazu einzuleiten.

§. 2. Sey wie vorhin $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ eine Function von x, und $X = \frac{A}{\mathfrak{N}} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}$ die vorgegebene Function, welche $\overset{x=a}{X} = \frac{A}{o} + \frac{\mathfrak{A}}{o}$, als zwei unendlich grofse Glieder gibt: so ist zwar dieser unendlich grofse Werth, als solcher hiemit richtig angegeben; indessen könnte doch eigentlich dieses $\overset{x=a}{X}$ aufser den beiden unendlich grofsen Gliedern noch ein endliches Glied haben, welches man auch in einigen Fällen durch einen geschickten Gebrauch anderweitig schon bekannter Methode würde darzulegen wissen.

Wenn zum Beispiel $\mathfrak{A} = \overset{x=a}{\mathfrak{Z}} = -A$ gäbe, so wäre die vorgelegte X ein solches $\frac{Z}{N} = \frac{A+\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}$, welches $\overset{x=a}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \frac{o}{o}$ geben, und demnach ihr $= \frac{o}{o}$, der Werthschätzung des XIXten Capitels unterworfen darbieten würde.

§. 3. Ein vorzüglich lehrreiches Beispiel dieser Art wäre $X = \frac{b^{rn}}{x^r} - \frac{(b^r - x^r)^n}{x^r}$, welches

durch plötzliche $x = 0$ setzung $\overset{x=0}{X} = \frac{b^{rn}}{0^r} - \frac{b^{rn}}{0^r}$, also zwei unendlich grofse Glieder vom $r$ten Grade geben würde, deren Ertrag lediglich eine Differenz $D = \frac{b^{rn}}{0^r} - \frac{b^{rn}}{0^r} = 0$ ausmacht, da doch durch die erwähnte anderweitige Auffindung dieses $\overset{x=0}{X}$ eine andere endliche Differenz sich ergeben wird.

Denn da dieses X ein $\frac{Z}{N} = \frac{b^{rn} - (b^r - x^r)^n}{x^r}$ ist, welches ein $\overset{x=0}{\frac{Z}{N}} = \frac{0}{0}$ ausmacht: so wissen wir aus dem XXten Capitel, dafs dieses $\frac{0}{0}$ durch $\overset{x\,=\,0}{\left(\frac{dZ\ :\ dx}{dN\ :\ dx}\right)}$ bestimmter, als durch die vorige plötzliche Vernullung des x, sich ergeben mufs.

Da nun $\frac{dZ\ :\ dx}{dN\ :\ dx} = \frac{-n(b^r - x^r)^{n-1} . - rx^{r-1}}{rx^{r-1}} =$ $n(b^r - x^r)^{n-1}$ ist: so haben wir $\overset{x\,=\,0}{\left(\frac{dZ : dx}{dN : dx}\right)} = nb^{r(n-1)}$; also nunmehr durch beide Verfahrungen zusammen genommen, $\overset{x=0}{X} = \frac{b^{rn}}{0} - \frac{b^{rn}}{0} + nb^{r(n-1)}$ gefunden.

§. 4. Schlechterdings mufs man nicht sagen wollen, dafs dieses $\overset{x=0}{X}$ aus zwei Unendlichgrofsen bestehe, welche eine endliche Differenz hätten; sondern das zweite Glied des vorgegebenen X, das Glied, $-\frac{(b^r - x^r)^n}{x^r}$, gibt $-\overset{x\,=\,0}{\left(\frac{(b^r - x^r)^n}{x^r}\right)} =$

$-\left(\frac{b^{rn}}{0^r} - nb^{r(n-1)}\right)$, besteht aus einem unendlich grofsen, (eigentlich vollgrofsen) und einem endlichen Theile, wie wir es nachher auch für dieses einzele Glied auf eine neue Weise vermittelst der Differentialrechnung werden finden lehren, hier aber, in diesem einzelen Beispiele, sogleich auch durch gewöhnlichen algebraischen Calcul es darthun können.

Denn nach dem ersten binomischen Lehrsatze (Vorerinner. V. 5.) hat man

$$(b^r - x^r)^n = b^{rn} - n\,b^{r.n-1)}\,x^r + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,b^{r(n-2)}\,x^{2r}$$
$$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^{r(n-3)}\,.\,x^{3r} + \ldots$$

also $$\frac{(b^r - x^r)^n}{x^r} = \frac{b^{rn}}{x^r} - n\,b^{r(n-1)} + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,b^{r(n-2)}\,x^r$$
$$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^{r(n-3)}\,.\,x^{2r} + \ldots$$

$$x = 0$$

also $$\left(\frac{(b^r - x^r)^n}{x^r}\right) = \frac{b^{rn}}{0^r} - n\,b^{r(n-1)} + 0^r + 0^{2r}$$

§. 5. Im obigen X sey $r = 2$ und $n = \frac{1}{2}$ gegeben, so hat man $X = \frac{b}{x^2} - \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$; durch plötzliche $x = 0$setzung also $\overset{x=0}{X} = \frac{b}{0.0} - \frac{b}{0.0} = 0$. Die allmählige Vernullung des x aber, vermittelst der Differentialmethode dazu genommen, gibt $\overset{x=0}{X} = \frac{b}{0.0} - \frac{b}{0.0} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{2b}$. Auf das völligste einander gleich sind die beiden Unendlichgrofsen, welche aus den beiden Gliedern des

vorgegebnen X entstehen; daher sich der endliche Ertrag $\frac{1}{2b}$ nur durch endliche Grössen ergeben kann, welche neben jenen Unendlichgrossen in dem $\overset{x=0}{X}$ vorhanden sind. In diesem ersten Beispiele, seit §. 3. behandelt, wurde dieser endliche Ertrag lediglich durch das zweite Glied der vorgegebnen X dargebracht, indem ihr erstes Glied ein reines Unendlichgross darlegte. In andern Beispielen dürfte das anders seyn können.

§. 6. Sey $G = \frac{a + fb}{(f-g)(x-f)} - \frac{a + gb}{(f-g)(x-g)}$, eine algebraische Summe aus diesen beiden ungleich bezeichneten Brüchen (also, bei solchen Werthen des x, bei welchen die beiden Nenner gleich bezeichnet ausfallen, eine in der gemeinen Rechenkunst so genannte Differenz), und hier von uns zum Beispiele gewählt, weil es für die Zerlegungs-Theorie im folgenden Capitel werth ist zu wissen, dafs bei jedem x, und bei allen, den übrigen Gröfsen beigelegten constanten Werthen, der Ertrag dieser beiden Brüche allemal $= \frac{a + bx}{(x-f)(x-g)}$, und namentlich für $g = f$ genommen, auch $= \frac{a + bx}{(x-f)^2}$ ist; obgleich durch $g = f$ gesetzt, sich $\overset{g=f}{G} = \frac{a + fb}{0.(x-f)} - \frac{a + fb}{0.(x-f)}$ als zwei unendlich grosse, einander so völlig gleiche Gegengröfsen ergibt, dafs man behaupten möchte, sie möchten etwas anders als $= 0$ nicht ausmachen können!

Und dieses ist auch wirklich der Fall; denn ich behaupte, dafs der Ertrag aus diesen beiden Unendlichgrofsen schlechterdings nichts anders, als $= 0$ seyn

kann; obgleich achtungswürdige Mathematiker sich vorzustellen scheinen, daſs diese beiden Unendlichgroſsen selbst, und als solche, eine endliche Differenz behaltend seyen.

Der wahre Vorgang ist auch hier, daſs für das vorgegebne G, wenn darin g = f plötzlich gesetzt wird, nur das obige $\overset{g=f}{G}$ sich ergeben kann; hiemit aber nur die beiden unendlichgroſsen Theile seines Werthes angegeben sind; der wahre vollständige Werth des $\overset{g=f}{G}$ aber überdies auch noch endliche Gröſsen enthält, so daſs die genauere Angabe

$$\text{ein } \overset{g=f}{G} = \frac{a + fb}{o.(x-f)} - \frac{a + fb}{o.(x-f)} + \frac{a + bx}{(x-f)(x-f)} = o + \frac{a + bx}{(x-f)^2}$$

ausmacht.

§. 7. Um diesen wahren Ertrag des $\overset{g=f}{G}$, wiederum durch die Methode des XXten Capitels zu finden, brauchen wir nur zu bedenken, daſs

$$G = \frac{a + fb}{(f-g)(x-f)} - \frac{a + gb}{(f-g)(x-g)} = \frac{(a+fb)(x-g)-(a+gb)(x-f)}{(x-f)(f-g)(x-g)}$$

ein $= \frac{Z}{N}$ ist, welches als $\overset{g=f}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \frac{o}{o}$ sich ergibt; folglich der Werth dieses $\frac{o}{o} = \overset{g=f}{\left(\frac{dZ : dg}{dN : dg}\right)}$ seyn muſs, wenn man G als eine Function des veränderlich gesetzten g betrachtet, und alle übrigen Gröſsen der G, auch x, als unveränderlich behandelt. Man findet dann $\frac{dZ : dg}{dN : dg} =$

$$\frac{-(a+fb)-(x-f)b}{-(x-f)(x-g)-(x-f)(f-g)} = \frac{a + bx}{(x-f)(x-g) + (x-f)(f-g)},$$

also $= \dfrac{a + b\,x}{(x-f)\,(x-f)}$, wenn $g = f$ geworden ist.

§. 8. Diese Methode aber kann und soll nur den Ertrag des $\overset{g=f}{G}$ angeben, ohne auch diejenigen Glieder des Werthes, welche sich aufheben, noch mit aufzuführen. Daſs dergleichen zwei unendlich groſse Glieder darin vorhanden sind, ist leicht zu finden. Denn wenn wir $G = \dfrac{a + f b}{(f-g)(x-f)} - \dfrac{a + g b}{(f-g)(x-g)} = P - Q$ nennen; so können wir, daſs sowohl $\overset{g=f}{P}$ als $\overset{g=f}{Q}$, auch etwas Unendlichgroſses ausmacht, sogleich dadurch erfahren, daſs wir plötzlich $g = f$ setzen.

§. 9. Demnach wissen wir nun allerdings, daſs $\overset{g=f}{G} = \overset{g=f}{P} - \overset{g=f}{Q} = \dfrac{a + f b}{0.(x-f)} - \dfrac{a + f b}{0.(x-f)} + \dfrac{a + b\,x}{(x-f)^2}$ ausmacht. Ob nun aber das letzte Glied lediglich neben dem Unendlichgroſsen des $\overset{g=f}{Q}$, oder zum Theil auch neben dem Unendlichgroſsen des $\overset{g=f}{P}$ vorhanden war? und ob nicht neben dem einen und dem andern auch noch andere endliche Glieder eigentlich vorhanden sind, die sich ebenfalls aufgehoben haben? dieses haben wir durch diese Werthforschungen nicht erfahren. Gleichwohl wäre es der Mühe werth, darüber auf's Reine zu kommen. (Da es schon bekannt ist, welche Schwierigkeiten uns namentlich in der Integralrechnung dadurch entstehen, daſs die endlichen Glieder neben den unendlich groſsen von diesen letztern gleichsam verschlungen scheinen; überdies aber bei manchen

Schwierigkeiten auch dieser ihr Grund noch nicht einmal gehörig bemerkt worden ist.)

§. 10. In dieser Hinsicht wird nun die Frage entstehen, ob wir nicht für $\overset{g=f}{P}$ und $\overset{g=f}{Q}$ einzeln auch ihre endlichen Werththeile möchten bestimmen können!

Soll dieses durch die Methode des vorigen Abschnittes versucht werden, so müssen wir, zuvörderst P in Angriff genommen, diesem P eine solche Hülfs-Function H hinzufügen, dafs P + H ein solches $\frac{Z}{N}$ ausmache, welches $\overset{g=f}{\frac{Z}{N}} = \frac{0}{0}$ gebe, und dessen bestimmte Werthe durch $\overset{g\,=\,f}{\left(\frac{dZ\,:\,dg}{dN\,:\,dg}\right)}$ finden lasse.

Diesen Forderungen geschieht am einfachsten Genüge durch $H = -\frac{a + g b}{(f-g)(x-f)}$, indem ja $P + H = \frac{a + f b}{(f-g)(x-f)} - \frac{a + g b}{(f-g)(x-f)}$ sogleich ein $\overset{g=f}{\left(\frac{Z}{N}\right)} = \overset{g\,=\!=\!=\!=\,f}{\left(\frac{(a + f b) - (a + g b)}{(f-g)\,(x-f}\right)} = \frac{0}{0}$ ausmacht, dessen Werth durch den Quotienten $\frac{dZ\,:\,dg}{dN\,:\,dg} = \frac{-b}{-(x-f)} = \frac{b}{x-f}$ bestimmt wird, wenn man dessen $g = f$ setzt.

Da nun in diesem Quotienten gar kein g vorkommt: so mufs sogar ganz allgemein
$$P + H = \frac{a + f b}{(f-g(x-f)} - \frac{a + g b}{(f-g)(x-f)} = \frac{b}{x-f} \text{ seyn.}$$

§. 11. Mit dem andern Theile

$-Q = -\frac{a + gb}{(f-g)(x-g)}$ die Hülfsgröfse $I = \frac{a + fb}{(f-g)(x-g)}$ verbunden,

gibt $I - Q = \frac{a + fb}{(f-g)(x-g)} - \frac{a + gb}{(f-g)(x-g)}$; gibt uns

also auch ein $\left(\frac{Z}{N}\right)^{g=f} = \frac{a + fb - (a + gb)}{(f-g)(x-g)}^{g=f} = \frac{o}{o}$, dessen Werth durch

$$\left(\frac{dZ : dg}{dN : dg}\right)^{g=f} = \left(\frac{-b}{-(x-g)}\right)^{g=f} = \frac{-b}{-(x-f)},$$

also ebenfalls $= \frac{b}{x-f}$, wie vorhin für $P + H$ gefunden wurde.

§. 12. Allemal mufs eine Gröfse, die der Form $\frac{Z}{N}$ unterworfen, ein $\left(\frac{Z}{N}\right)^{g=f} = \frac{o}{o}$ gibt, in ihrem Zähler Z und Nenner N wenigstens einmal den Factor $g - f$, oder $f - g$ enthalten; mufs daher auch ohne Differentialrechnung dieses gemeinschaftlichen Factors können entledigt werden; mufs auch dieses durch wenigen Calcul geschehen können, wo dieser gemeinschaftliche Factor so deutlich vor Augen liegt, wie in den beiden hier behandelten Fällen. Denn es

ist ja $P + H = \frac{a + fb - a - gb}{(f-g)(x-f)} = \frac{(f-g)b}{(f-g)(x-f)} = \frac{b}{x-f}$

und $I - Q = \frac{a + fb - a - gb}{(f-g)(x-g)} = \frac{(f-g)b}{(f-g)(x-g)} = \frac{b}{x-g}$.

§. 13. Obgleich nun $\overset{g=f}{H+I} =$

$$-\left(\overset{g=f}{\frac{a+gb}{(f-g)(x-f)}}\right)+\left(\overset{g=f}{\frac{a+fb}{(f-g)(x-g)}}\right)=-\frac{a+fb}{o.(x-f)}+\frac{a+fb}{o.(x-f)}=o$$

ist: so dürfen wir doch aus $\overset{g=f}{P+H+I-Q} = 2\frac{b}{x-f}$

nicht schlieſsen, daſs auch $\overset{g=f}{P-Q} = 2\frac{b}{x-f}$ sey!

Denn das $\overset{g=f}{H+I} = o$ ist ja nur durch plötzliche $g = f$ setzung gefunden, welches bloſs auf die unendlich groſsen Theile seines Werthes führen konnte. Durch die endlichen Werthstheile dagegen kommt es, daſs wir $\overset{g=f}{P+H+I-Q} = 2\frac{b}{x-f}$

und dagegen $\overset{g=f}{P-Q} = \frac{a+bx}{(x-f)^2}$ nach §. 6 haben;

und nun würde es nur (für einige einzele Fälle, nicht aber allgemein gelingen können, aus diesen Combinationen auf die genauen und vollständigen Werthe des $\overset{g=f}{P}$ und $\overset{g=f}{Q}$ einzeln genommen zu schlieſsen; daher wir nun auf folgende andre Weise langsam und bedächtig das Ziel zu erreichen suchen wollen.

Erste Aufgabe.

§. 14. Den unendlichgroſsen, und den endlichen Theil im Werthe des $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}}$ zu finden.

Auflösung.

§. 15. Der unendlich grofse Theil, für sich allein genommen, ist hier leicht zu finden, weil man nur geradezu g = f zu setzen braucht, um ihn sogleich als $\frac{1}{f-f} = \frac{1}{0}$ erhalten zu haben.

Um aber neben demselben auch den endlichen Theil im gesuchten Werthe des $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}}$ zu erhalten, müssen wir benutzen, dafs $\frac{1}{f-g} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \cdot \frac{g}{f-g}$ ist, für jeden Werth des g, folglich auch für g = f, folglich $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \cdot \overset{g \quad\quad f}{\frac{g}{f-g}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{0}$

Anmerkung 1.

§. 16. Die benutzte Gleichung $\frac{1}{f-g} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \cdot \frac{g}{f-g}$ kann nicht nur durch Reducirung der rechten Seite auf gemeinschaftlichen Nenner, oder durch Multiplicirung beider Seiten mit f — g, sehr leicht als richtig bestätigt, sondern auch auf mancherlei Weise sehr methodisch gefunden werden; am bequemsten durch die IIte Binominalreihe (Vorerinnerung V §. 5.), welche dazu geeignet ist, jede Potenz von einem verneinten ganzen Grade durch eine endliche Anzahl von Gliedern anzugeben. Sie gibt uns sogleich

$$\frac{1}{f-g} = (f-g)^{-1} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \cdot \frac{g}{f-g} + 0$$

Die Ite gewöhnlichere Binomialreihe gibt dagegen $(f-g)^{-1} = \frac{1}{f} + \frac{g}{f^2} + \frac{g^2}{f^3} + \frac{g^3}{f^4}$ u. s. w. ohn' Ende,

also $\overset{g=f}{(f-g)^{-1}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} + \frac{1}{f} + \frac{1}{f}$ u. s. w. ohn' Ende;

würde uns daher lediglich $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \infty \cdot \frac{1}{f}$ anzugeben scheinen, wenn wir nicht darauf aufmerksam wären, daſs man volles Recht habe zu behaupten: auch sie gibt uns $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \overset{g=f}{(f-g)^{-1}} = \frac{1}{f} + \infty \cdot \frac{1}{f}$, weil ja das erste Glied dieser Reihe für sich, ganz unabhängig von g, im Allgemeinen schon $= \frac{1}{f}$ ist, und nur der übrige Theil erst durch $g = f$ ein Unendlichgroſses wird.

Anmerkung 2.

§. 17. Die Behauptung, was für jeden Werth des g gilt, muſs auch für $g = f$ gelten, wird auch hier, wie allemal, durch das Gesetz der Stetigkeit dem Verstande anschaulich, wenn wir uns g veränderlich, und nach und nach dem $= f$ durch unendlich kleine Veränderungen annähernd denken; auch hier unter unendlich kleinen Annäherungen solche verstehen, die man sich gleich anfangs schon je kleiner je besser zu denken; dann aber noch dergestalt kleiner werdend zu denken hat, daſs der Unterschied zwischen g und f ein völliges Nichts, $= 0$ werdend, und geworden seyn soll. So lange $g - f$ noch nicht $= 0$ geworden, sondern noch $= 0$ werdend, also $\frac{1}{f-g}$ noch nicht $= \frac{1}{\infty}$ sondern

noch $\frac{1}{\infty}$ ist (Vorerinner. VII.), so lange ist der unendliche Theil neben f noch nicht $\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{o} = \frac{\infty}{f}$ sondern nur ein $= \frac{1}{f}\cdot\infty$

Unschicklich wäre es hier zu behaupten, dafs man sich nicht völlig $g = f$, also nicht völlig $f - g = o$ geworden denken solle; folglich mufs man auch behaupten, dafs $\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{o} = \infty\frac{1}{f}$ ein Vollgrofs geworden ist, so wie $f - g = o$ ein völliges Nichts geworden ist. (Vorerinner. VII. §. 6.)

Zusatz.

§. 18. Aus dem Satze $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f-g} = \frac{1}{f} + \frac{1}{o}$, welcher durch die vorige Auflösung gefunden und erwiesen ist, kann z. B. nicht nur

1) $\overset{g=f}{\left(\frac{A}{f-g}\right)} = \frac{A}{f} + \frac{A}{f-g} \overset{g = f}{=} \frac{A}{f} + \frac{A}{o}$, sondern auch

2) $\overset{g=g}{\left(\frac{A}{X(f-g)}\right)} = \frac{A}{X.f} + \frac{A}{X(f-g)} \overset{g = f}{=} \frac{A}{X.f} + \frac{A}{X.o}$, namentlich auch

3) $\overset{g=f}{\left(\frac{A}{(x-f)(f-g)}\right)} = \left(\frac{A}{(x-f).f}\right) + \frac{A}{(x-f)(f-g)} \overset{g = f}{=} \frac{A}{(x-f).f} + \frac{A}{(x-f).o}$

gefolgert werden, auch wenn X keine constante Gröfse, wie A, sondern eine beliebige Function eines veränderlichen x, aber von der Veränderung des g ganz unabhängig ist; weil wir ja solche A und X von g unabhängig multipliciren und dividiren müs-

sen. Namentlich kann dieses $X = x - f$ seyn, wie wir es in der Folge am meisten gebrauchen werden.

Bemerkung.

§. 19. Sogleich in 1) sey $A = f$, so hat man $\overset{g=f}{\left(\frac{f}{f-g}\right)} = \overset{g=f}{\frac{f}{f} + \frac{f}{f-g}} = 1 + \frac{f}{0}$. Wenn wir aber eben so auch auf $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}} = \overset{g=f}{\frac{g}{f} + \frac{g}{f-g}} = 1 + \frac{f}{0}$ schlieſsen, also $A = g$ setzen wollen: so würde ja dieser Factor nicht, wie wir im vorigen Paragraphen es ausdrücklich bedungen haben, von der Veränderlichkeit des g unabhängig seyn! Wir würden dadurch $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}}$ dem $\overset{g=f}{\frac{f}{f-g}}$ völlig gleich erhalten. Eine Behauptung, deren Unrichtigkeit schon dadurch einleuchtet, weil daraus folgen würde, daſs $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}} - \overset{g=f}{\frac{f}{f-g}} = 0$ seyn müſste; da doch $\frac{g}{f-g} - \frac{f}{f-g} = \frac{g-f}{f-g} = -1$ seyn muſs, bei allen Werthen des g, also auch bei $g = f$: überdies auch $\overset{g=f}{\frac{g-f}{f-g}} = \frac{\mp 0}{\pm 0} = -1$ durch die Methode des XIXten Capitels sich $= \frac{dg : dg}{-dg : dg} = -1$ ergeben müſste; wobei übrigens, der dortigen Methode gemäſs, nur von den endlichen Werthen des Ausdruckes eigentlich die Rede seyn würde. Die unendlichen Werthe aber lassen sich leicht hinzufü-

gen, weil ja $\frac{g-f}{f-g} = \frac{g}{f-g} - \frac{f}{f-g}$, durch plötzliche $g = f$ setzung, sogleich $= \frac{f}{0} - \frac{f}{0}$ gibt, und geben muſs; daher wir für die Aufsätze der folgenden Aufgabe gebrauchen können,

daſs $\overset{g \;=\!=\!=\; f}{\frac{g}{f-g} - \frac{f}{f-g}} = -1 + \frac{f}{0} - \frac{f}{0}$ seyn muſs.

Zweite Aufgabe.

§. 20. Den unendlich groſsen und den endlichen Theil im Werthe des $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}}$ zu finden.

Auflösung.

§. 21. Da $\overset{g \;=\!=\!=\; f}{\frac{g}{f-g} - \frac{f}{f-g}} = -1 + \frac{f}{0} - \frac{f}{0}$ ist (§. 19)

und $+ \overset{g=f}{\frac{f}{f-g}} = 1 + \frac{f}{0}$ ist (auch §. 19)

so muſs $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}} = 0 + \frac{f}{0}$, ein reines Unendlichgroſs ohne endlichen Zusatz seyn.

Zusatz.

§. 22. Da $\overset{g=f}{\frac{g}{f-g}} = 0 + \frac{f}{0}$ hiermit gefunden und erwiesen ist, so muſs z. B.

auch $\overset{f=g}{\frac{A.g}{f-g}} = A.o + \frac{A.f}{o} = o + \frac{A.f}{o}$ seyn; und da $\frac{1}{x-f}$ ebenfalls ein von der Veränderlichkeit des g unabhängiger Factor ist, so muſs

auch $\overset{g=f}{\frac{g}{(x-f)(f-g)}} = \frac{o}{x-f} + \overset{g=f}{\frac{f}{(x-f)(f-g)}} = o + \frac{f}{(x-f).o}$ seyn, also ebenfalls ein reines Unendlichgroſs ausmachen; indem das endliche Glied sich $=o$ ergibt.

Bemerkung.

§. 23. Wenn aber nach $\overset{g=f}{\frac{g}{(x-f)(f-g)}}$ gefragt, wird, wo der Divisor $(x-g)$ nicht wie der vorige $(x-f)$ vom g unabhängig ist, sondern selbst auch g in sich hat: so können wir schon aus der vorigen Bemerkung §. 19. abnehmen, daſs hier eine eigene Werthforschung nöthig wird.

Dritte Aufgabe.

§. 24. **Jeden endlichen und unendlich groſsen Theil im Werthe des $\overset{g=f}{\frac{1}{(x-f)(f-g)}}$ zu finden.**

Auflösung.

§. 25. Da

$$\frac{1}{(x-f)(f-g)} - \frac{1}{(x-g)(f-g)} = \frac{(x-g)-(x-f)}{(x-f)(x-g)(f-g)} = \frac{f-g}{(x-f)(x-g)(f-g)}$$

$= \frac{1}{(x-f)(x-g)}$ ist, bei jedem Werthe des g, also

auch $\overset{g=f}{\frac{1}{(x-f)(f-g)}} - \overset{g=f}{\frac{1}{(x-g)(f-g)}} = \frac{1}{(x-f)(x-f)}$ seyn muſs;

und $\overset{g=f}{\frac{1}{(x-f)(f-g)}} = \frac{1}{(x-f).f} + \frac{1}{(x-f).o}$ ist

(nach 3) §. 18.): so folgt, von dieser letzten Gleichung die vorhergehende abgezogen,

daſs $\overset{g=f}{\frac{1}{(x-g)(f-g)}} = \frac{1}{(x-f)f} - \frac{1}{(x-f)^2} + \frac{1}{(x-f)o}$ seyn muſs.

Anmerkung.

§. 26. Begreiflich konnte und sollte aus der ersten Gleichung in der Auflösung nur der endliche Theil ihres Werthes für den Fall $g = f$ bestimmt werden in der zweiten Gleichung, indem man ja in jener ersten, den Zähler, und den Nenner, des Factors $f - g$ entledigt hatte, durch welchen für $g = f$ die unendlich groſsen Theile $\frac{1}{(x-f).o} - \frac{1}{(x-f).o}$ entstehen; welche sich übrigens durch plötzliche $g = f$setzung sogleich angeben, auch als nur unter sich vergleichbar abgesondert aufgeführt werden können; übrigens, da sie beide zwei völlig gleiche unendlichgroſse Gegengröſsen ausmachen, einander vernullen müssen, und auf den in der Aufgabe gesuchten Werth keinen Einfluſs behalten. Bei der folgenden Auflösung wollen wir indessen die Unendlichgroſsen sogleich jeder Gleichung hinzufügen, hinter dem ausgezeichnet verlängerten —+—.

Vierte Aufgabe.

§. 27. **Die endlichen und die unendlich grofsen Theile im Werthe des** $\overset{g = f}{\dfrac{g}{(x-g)(f-g)}}$ **zu finden.**

Auflösung.

§. 28. Da $\dfrac{g}{(x-g)(f-g)} - \dfrac{f}{(x-g)(f-g)} = \dfrac{g-f}{(x-g)(f-g)} = -\dfrac{1}{x-g}$

ist, bei jedem Werthe des g: so mufs

$$\overset{g = f}{\dfrac{g}{(x-g)(f-g)}} - \overset{g = f}{\dfrac{f}{(x-g)(f-g)}} = -\frac{1}{x-f} + \frac{f}{(x-f).o} - \frac{f}{(x-f).o}$$

seyn; indem wir die beiden unendlich grofsen Glieder, durch plötzliche g = f. Setzung sogleich erhalten können.

Da nun $+ \overset{g = f}{\dfrac{f}{(x-g)(f-g)}} = + \dfrac{1}{x-f} - \dfrac{f}{(x-f)^2} + \dfrac{f}{(x-f).o}$

seyn mufs, vermöge der vorigen Aufgabe und ihrer Auflösung (§. 25):

so mufs $\overset{g = f}{\dfrac{g}{(x-g)(f-g)}} = - \dfrac{f}{(x-f)^2} + \dfrac{f}{(x-f)o}$ seyn.

§. 29. **Folgende IV Lehrsätze bei der Factoren-Form f — g**, welche durch die vorhergehenden vier Auflösungen gefunden sind, wollen wir nun in der Kürze hier aufführen, und dann die 4 Lehrsätze für die Factoren-Form g — f mit gehöriger Bedachtsamkeit hinzufügen und rechtfertigen. (Die Ueberschriften g = f hat man sich auch für alle in der zweiten, dritten, vierten Zeile, unter ihnen stehende Ausdrücke geltend zu denken.)

$$g = f \qquad\qquad g = f$$

$$\text{I)}\ \frac{1}{f-g} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \cdot \frac{g}{f-g} = \frac{1}{f} -\!\!+\!\!- \frac{1}{0} \quad (\S.\ 55)$$

also auch $\frac{f}{f-g} = 1 + \frac{f}{f-g} = 1 -\!\!+\!\!- \frac{f}{0}$

Ferner,

$$g = f$$

$$\frac{A}{(x-f)(f-g)} = \frac{A}{(x-f)f} + \frac{A \cdot g}{f(x-f)(f-g)} = \frac{A}{(x-f)f} -\!\!+\!\!- \frac{A}{(x-f).0} \quad (\S.\ 18)$$

also auch

$$\frac{f}{(x-f)(f-g)} = \frac{1}{x-f} + \frac{f}{(x-f)(f-g)} = \frac{1}{x-f} \ +\!\!- \frac{f}{(x-f)\ 0}$$

$$g = f$$

$$\text{II)}\ \frac{g}{f-g} = 0 -\!\!+\!\!- \frac{f}{0} \quad (\S.\ 21)$$

auch

$$\frac{g}{(x-f)(f-g)} = 0 -\!\!+\!\!- \frac{f}{(x-f)0} \quad (\S.22);$$

jedoch mit Ausnahme des Werthfalles $x = f$, in welchem das erste Glied als $\frac{0}{x-f}$ sich $= \frac{0}{0}$ ergibt, also etwas anders als $= 0$ ausmachen könnte.

$$g = f$$

$$\text{III)}\ \frac{1}{(x-g)(f-g)} = \frac{1}{(x-f)f} - \frac{1}{(x-f)^2} -\!\!+\!\!- \frac{1}{(x-f)\ 0} \quad (\S.25)$$

also auch

$$\frac{f}{(x-g)(f-g)} = \frac{1}{x-f} - \frac{f}{(x-f)^2} -\!\!+\!\!- \frac{f}{(x-f).0}$$

$$g = f$$

$$\text{IV)}\ \frac{g}{(x-g)(f-g)} = -\frac{f}{(x-f)^2} \qquad -\!\!+\!\!- \frac{f}{(x-f).0} \quad (\S.28)$$

§. 30. **Die dazu gehörigen 4 Lehrsätze für die umgewandte Factoren-Form $g-f$ sind:**

$$g = f \qquad\qquad g = f$$

$$1)\quad \frac{1}{g-f} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{f-g} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{0}$$

$$\text{auch}\ \frac{f}{(x-f)(g-f)} = -\frac{1}{x-f} - \frac{f}{(x-f)(f-g)} = -\frac{1}{x-f} - \frac{f}{(x-f).0}$$

$$2)\quad \frac{g}{g-f} = 0 - \frac{f}{0}$$

$$\frac{g}{(x-f)(g-f)} = \frac{0}{x-f} - \frac{f}{(x-f).0}$$

$$3)\quad \frac{1}{(x-g)(g-f)} = -\frac{1}{(x-f).f} + \frac{1}{(x-f)^2} - \frac{1}{(x-f).0}$$

$$\text{auch}\ \frac{f}{(x-g)(g-f)} = -\frac{1}{x-f} + \frac{f}{(x-f)^2} - \frac{f}{(x-f).0}$$

$$4)\quad \frac{g}{(x-g)(g-f)} = +\frac{f}{(x-f)^2} - \frac{f}{(x-f).0}$$

Erklärung und Rechtfertigung dieser 4 Lehrsätze.

§. 31. Bei den obigen IV Aufgaben wurde ein für allemal g als die veränderliche Gröſse betrachtet, welche = f geworden. die Vernullung $f - g = 0$ dergestalt voraussetzt, daſs f als die gegebne Gröſse betrachtet wird (die übrigens, wie sich von selbst versteht, bald bejaht, bald verneint, bald auch unmöglich gegeben seyn kann).

Wenn man nun z. B. neben $\frac{1}{f-g}$ den Ausdruck $\frac{1}{g-f}$ zu behandeln hat: so muſs natürlich auch hierin g als die veränderliche Gröſse betrachtet werden, welche = f geworden, den Factor $g - f = 0$ gemacht habe.

Da nun $\frac{1}{g-f} = -\frac{1}{f-g}$ ist, so wird den meisten Analysten die Folgerung des hier in §. 30.

aufgeführten 1ten Lehrsatzes aus dem obigen Iten, §. 29., so leicht und unverfänglich scheinen, daſs es ihnen unbegreiflich vorkommen mag, darüber noch Erklärung und Rechtfertigung hinzufügen zu wollen. Solche Unbedachtsamkeit bestraft sich dann in der Anwendung mit Widersprücken und Unbegreiflichkeiten, worüber man halbe und ganze Jahrhunderte hin und her erklärt und streitet, ohne darüber wahrhaft auf's Reine zu kommen.

§. 32. Ich bemerke zuvörderst und Erstens:

$$\text{Wenn aus dem I) } \frac{f}{f-g} = 1 + \frac{f}{f-g} = 1 + \frac{f}{o} \quad (g = f)$$

$$\text{auf } \frac{f}{g-f}\left(= -\frac{f}{f-g}\right) = -1 - \frac{f}{f-g} = -1 - \frac{f}{o}$$

geschlossen wird: so wird die o im $\frac{f}{o}$ des Iten Satzes für schlechthin o geachtet, die allerdings als solche, weder bejaht noch verneint ist; und dabei soll es zur Bequemlichkeit des Calculs allerdings auch verbleiben.

Aber da man neben $f - g = o$ auch $g - f = o$ hat, und $g - f = -(f - g)$, also auch $(g - f) = -(f - g) = -o$ seyn muſs (für $g = f$), also eine verneinte o neben der $f - g = o$ schlechthin, hier in Anschlag kommt: so muſs die für schlechthin geachtete o als die bejahte hier geachtet werden (M. s. meinen Ersten Unterricht in der algebraischen Auflösung, 2te Auflage, im 2ten u. 10. Kap.), und dazu wird erfordert, daſs man sich bei dem $g - f = o$ werden, die g von der f dergestalt verschieden gedacht habe, daſs vor dem $= o$ geworden seyn, während des $= o$ werdens, $f - g$ bejaht war,

damit die entstandene o eine niedrigste Gränze der bejahten f — g ausmache.

§. 33. Obgleich nun dieses zur Bequemlichkeit des Calculs im Allgemeinen vorausgesetzt werden soll: so ist doch rathsam, zur Orientirung in Fällen, wo Zweifel entstehen, es

Zweitens in Gedanken zu haben, daſs allemal wo $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \frac{1}{\mp o}$ ist, dann $\overset{g=f}{\frac{1}{g-f}} = \frac{1}{\pm o}$ seyn muſs. Denn wenn f — g während des Nullwerdens bejaht war, so muſs g — f während des Nullwerdens verneint gewesen seyn; und umgekehrt. Hiermit ist nun

Drittens die Schwierigkeit gehoben, welche sonst die allgemeine Behauptung in §. 15. verursachen müſste, daſs man nämlich den unendlichen Werth des verlangten Ausdruckes allemal dadurch finden kann, daſs man $g = f$ setzt.

Sobald wir von $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}}$ den endlichen Werth $\frac{1}{f}$ wissen: so können wir nun auch schlieſsen, daſs der ganze Werth $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \frac{1}{f} + \overset{g=f}{\frac{1}{f-g}}$ ist, und nun $\overset{g=f}{\frac{1}{g-f}} = -\frac{1}{f} + \overset{g=f}{\frac{1}{g-f}}$ seyn muſs, weil ja ganz allgemein, wo $\overset{g=f}{\frac{1}{f-g}} = \frac{1}{\mp o}$ ist, allemal $\overset{g=f}{\frac{1}{g-f}} = \frac{1}{\pm o}$ seyn muſs:

§. 34. In diesen acht Lehrsätzen sind nun die endlichen Theile des Werthes neben den unendlichen so genau ausgedrückt, dass sie zur Befriedigung des Wunsches §. 9. hinreichen müssen, nämlich deutlich zu durchsehen, wie in dem, für die Zerlegungslehre so merkwürdigen Satze, dass

$$\overset{g\,=\,f}{\frac{a+bf}{(x-f)(f-g)}} - \overset{g\,=\,f}{\frac{a+bg}{(x-g)(f-g)}} = \frac{1}{(x-f)\,0} - \frac{1}{(x-f).0} + \frac{a+bx}{(x-f)^2} \text{ ist,}$$

einige endliche, und die sämmtlichen unendlich grossen Theile der Werthe des ersten und des zweiten Bruches, sich aufheben, und so den endlichen Werth übrig lassen.

§. 35. *Ausführung.*

Es ist $\overset{g\,=\,f}{\frac{a}{(x-f)(f-g)}} = \frac{a}{(x-f).f} + \frac{a}{(x-f).0}$ (§.19. Lehrsatz I., dritte Gleichung.)

folglich $+\frac{bf}{(x-f)(f-g)} = \frac{b}{x-f} + \frac{bf}{(x-f).0}$

$$-\frac{a}{(x-g)(f-g)} = -\frac{a}{(x-f).f} + \frac{a}{(x-f)^2} - \frac{a}{(x-f).0}$$

(Lehrs. III. erste Gleichung.)

$$-\frac{bg}{(x-g)(f-g)} = +\frac{bf}{(x-f)^2} - \frac{bf}{(x-f).0}\text{. Lehrs. IV.}$$

$$\frac{a+bf}{(x-f)(f-g)} - \frac{a+bg}{(x-g)(f-g)} = \frac{b}{x-f} + \frac{a}{(x-f)^2} + \frac{bf}{(x-f)^2}$$

$$\text{also} = \frac{bx - bf + a + bf}{(x-f)^2}$$

$$= \frac{a+bx}{(x-f)^2}$$; und die sämmtlichen unendlich grossen Theile haben sich aufgehoben.

§. 36. Da sich nun für die beidem Brüche in der linken Seite des Resultates, die *unendlich groſsen Theile* ihres Werthes leicht angeben lassen; indem

$$\left.\frac{a+bf}{(x-f)(f-g)}\right|_{g=f} - \left.\frac{a+bg}{(x-f)(f-g)}\right|_{g=f} = \frac{a+bf}{(x-f).0} - \frac{a+bf}{(x-f).0}$$

seyn muſs: so kann diese Uebereinstimmung mit den einzelen unendlichgroſsen Theilen in der obigen *Ausführung*, zu einiger Bestätigung für die Richtigkeit des ganzen Verfahrens vermittelst des Erfolges dienen.

§. 37. Da wir auch vollständig uns hersetzen können, daſs

$$\left.\left\{\begin{matrix} \frac{a+bf}{(x-f)(f-g)} \\ -\frac{a+bg}{(x-g)(f-g)} \end{matrix}\right\}\right|_{g=f} = \left\{\begin{matrix} \frac{a+bf}{(x-f).0} + \frac{a}{(x-f).f} + \frac{bf}{(x-f)f} \\ -\frac{a+bf}{(x-f).0} - \frac{a}{(x-f)f} + \frac{a+bf}{(x-f)^2} \end{matrix}\right.$$

$$= \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + 0 + \frac{a+bx}{(x-f)^2}$$ seyn

muſs; indem $\frac{bf}{(x-f)f} + \frac{bf}{(x-f)^2} = \frac{b(x-f)+bf}{(x-f)^2} = \frac{bx}{(x-f)^2}$ sich ergibt: so liegt es uns hiermit deutlich vor Augen, daſs die beiden unendlich groſsen Theile so völlig *einander vernullende Gegengröſsen* sind, daſs *deren Differenz* keinesweges etwas anders als $= 0$ seyn kann; sondern die endliche Differenz der beiden vorgegebnen Brüche aus den endlichen Theilen ihrer Werthe zusammen genommen sich ergeben muſs.

§. 38. Aus den IV Lehrsätzen in §. 29 und den 4 Lehrsätzen in §. 30 lassen sich nun viele merkwürdige Folgerungen ableiten. So erhellet aus Lehrsatz I. sogleich, daſs

$g = f$

überhaupt $\frac{1}{(f-g)^n}$ seinen endlichen Werth $= \frac{1}{f^n}$, neben mehren unendlich grofsen in sich haben mufs; u. dergl. mehr.

Einige der schwierigsten Fälle bei diesen Werthforschungen können uns durch folgenden Lehnsatz sehr erleichtert werden.

Lehnsatz.

§. 39. Wenn $\frac{1}{N} = \frac{1}{\alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 + \ldots}$ ist,

und dessen $\underset{x=a}{X} = 0$ gibt,

so ist $\underset{x=a}{\frac{1}{N}} = \underset{x=a}{\frac{1}{\alpha X}} - \frac{\beta}{\alpha\alpha}$.

Beweis.

§. 40. Schon durch das gewöhnliche Verfahren des algebraischen Dividirens kann man finden, dafs $\frac{1}{N} = \frac{1}{\alpha X} - \frac{\beta}{\alpha\alpha} + \mathfrak{C}X + \mathfrak{D}X^2 + \ldots$ sich ergibt, so dafs $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ u. s. w durch α, β, γ, ... bestimmliche, also wie diese selbst, vom x unabhängige Coefficienten bedeuten,

namentlich $\mathfrak{C} = \left(\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha}$ ist.

Folglich $\underset{x=a}{\frac{1}{N}} = \underset{x=a}{\frac{1}{aX}} - \frac{\beta}{\alpha\alpha} + \mathfrak{C}.0 + \mathfrak{D}.0.0 + \ldots$. so

dafs $\underset{x=a}{\frac{1}{\alpha X}}$ für das jedesmal gegebne X noch zu finden, $-\frac{\beta}{\alpha\alpha}$ aber allgemein durch α und β schon be-

stimmt ist, ohne dass die folgenden gegebnen Coefficienten, γ, δ, u. s. w. irgend einen Einfluss auf die im Lehnsatze behauptete Gleichung haben können.

Zusatz 1.

§. 41. Wenn, wie vorhin, $\overset{x=a}{X} = o$ gibt, II) aber $\frac{1}{N} = \frac{1}{\alpha + \beta X + \gamma X^2 + \ldots}$ gegeben ist, also nach vorigem Beweise, dieses $\frac{1}{N} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha\alpha} X + \mathfrak{C} X^2 + \ldots$ seyn muss: so muss dieses $\frac{1}{\overset{x=a}{N}} = \frac{1}{\alpha} + o$ seyn.

Zusatz 2.

§. 42. III) Wenn $\frac{1}{N} = \frac{1}{\frac{\alpha}{X} + \beta + \gamma X + \delta X^2 + \ldots}$ gegeben ist, also nach vorigem Beweise

$$\frac{1}{N} = \frac{X}{\alpha} - \frac{\beta X^2}{\alpha\alpha} + \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha\alpha} X^3 + \mathfrak{D} X^4 + \ldots$$

seyn muss; so muss

$$\text{dieses } \frac{1}{\overset{x=a}{N}} = \frac{\overset{x=a}{X}}{\alpha} - \frac{\beta \overset{x=a}{X^2}}{\alpha\alpha} + \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha\alpha} \overset{x=a}{X^3} + \ldots \text{ seyn.}$$

Aufgabe.

§. 43. **Den endlichen Werth des $\frac{1}{\overset{x=1}{\lg x}}$ zu finden, dessen unendlich grosser Werth $= \frac{1}{0}$ ist.**

Auflösung.

§. 44. Da $\frac{2}{\lg x} = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots}$ ist (X. §. 37): so haben wir durch den Lehrsatz, §. 41, dessen α, β, γ, X und a

hier $= 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{x-1}{x+1}$ und 1 gegeben sind,

dafs $\overset{x=1}{\frac{2}{\lg x}} = \overset{x=1}{\frac{x+1}{x-1}} + 0 + 0$ seyn mufs.

Da nun $\overset{x=1}{\frac{x}{x-1}} = 0 - \frac{1}{0}$ ist (Lehrs. 2. §. 30., dessen g $=$ x und dessen f $=$ 1 gesetzt)

und $\overset{x=1}{\frac{1}{x-1}} = -1 - \frac{1}{0}$ ist (Lehrs. 1. §. 30.)

also $\overset{x=1}{\frac{x+1}{x-1}} = -1 - \frac{2}{0}$ ist; so

mufs $\overset{x=1}{\frac{1}{\lg x}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{0}$ seyn.

Anmerkung.

§. 45. Keineswegs soll und kann hiemit behauptet werden, dafs nun jedes $\overset{x=1}{\frac{1}{\lg x}}$ aus einem negativen Unendlichgrofsen und $-\frac{1}{2}$ bestände; sondern nur dann, wenn $\lg x$ bei seinem Nullwerden kleiner als 0, also negativ, also $x < 1$ war: nur

dann ist $\overset{x=1}{\frac{1}{\lg x}}$ ein $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{0}$. Wenn dagegen $x > 1$ in seinem $= 1$ werden, folglich $\log x$ in seinem $= 0$ werden, gröſser als 0 war, so ist $\frac{1}{\lg x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{0}$ (M. s. Vorerinner. VII. §. 8.)

Aufgabe.

§. 46. Den endlichen Werth des $\overset{x=1}{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\lg x}}$ zu finden, dessen unendlich groſse Werthe $= -\frac{1}{0} + \frac{1}{0} = 0$ geben.

Auflösung.

§. 47. Da $\overset{x=1}{\frac{x}{x-1}} = 0 - \frac{1}{0}$ und $-\overset{x=1}{\frac{1}{\lg x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{0}$ ist, nach voriger Auflösung:

so muſs $\overset{x=1}{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\lg x}} = \frac{1}{2} + 0$ seyn, unter dem Beding, daſs $\log x$ vor seinem $= 0$ geworden seyn, kleiner als 0, also verneint, also x kleiner als 1 war.

Zusatz.

§. 48. Wenn dagegen x bei seinem $= 1$ werden gröſser als 1 wäre: so hätte man

$$x = 1$$
$$\frac{x}{x-1} = 0 + \frac{1}{0}$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 1$$

$-\frac{1}{\lg x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{0}$, also $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\lg x} = + \frac{1}{2} + 0$, wie vorhin, obgleich die beiden unendlich grofsen Theile seines Werthes nunmehr gerade die Gegengröfsen der vorigen sind.

§. 49. Am Ende des Buches dürfte ich, falls schicklicher Raum dazu bleibt, noch einige diesem XXVten, und dem obigen XIXten Kapitel gemeinschaftliche Aufgaben hinzufügen, nachdem ich dann auch von der ebenfalls hier eingreifenden Zerlegung gebrochener Functionen schon werde gehandelt haben.

Sechsundzwanzigstes Capitel.

Einleitung in die Zerlegung gebrochener Functionen.

§. 1. Jedes $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots\ldots Mx + N$, dessen n irgend eine bejahte ganze Zahl ist, dessen Cofficienten A, B .... M und N, kein x enthalten, und dessen erstes höchstes Glied x^n keinen andern Coefficienten als $+1$ hat, wollen wir ein algebraisch geordnetes (das heifst, für die algebraische Auflösung bequem geordnetes) Aggregat vom n ten Grade nennen. Wenn dergleichen Aggregat $= 0$

gesetzt wird, so hat man die allgemeine geordnete Form einer Gleichung vom nten Grade.

§. 2. Wenn nun z. B. für die geordnete kubische Gleichung

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ erwiesen ist, daſs allemal
$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x + a)(x + b)(x + c)$ seyn, ihr Aggregat allemal ein Product aus solchen 3 einfachen Factoren seyn muſs, von denen jeder die unbekannte x nur in der ersten Dignität enthält: so ist es eben dadurch erwiesen, daſs das cubische Aggregat sowol durch $x = -a$, als auch $x = -b$, oder $x = -c$ gesetzt, sich $= 0$ ergeben muſs, also die cubische Gleichung drei Wurzeln hat, welche wir der folgenden Anmerkung wegen, die drei Vernullungswerthe der drei einfachen Factoren nennen wollen; und einfach heiſsen diese Factoren eben deſshalb, weil jeder derselben $= 0$ gesetzt, eben dadurch und dafür nur einen einfachen Werth des x bestimmt.

§. 3. Da nun die wichtigste und eigenthümlichste Lehre der Algebra, daſs in jeder Gleichung vom nten Grade, der unbekannten x allemal n Wurzeln, n Werthformen zukommen müssen, durch welche der Gleichung Genüge geschieht, am besten erwiesen ist, wenn man dargethan hat, daſs jedes Aggregat vom nten Grade in n einfache Factoren zerlegbar seyn muſs: so hat man diesen Satz als einen Hauptsatz der ganzen Algebra zu betrachten.

Schon im Journal für Erzieher, Dessau 1784, S. 516, habe ich erörtert, warum selbst auch die besten damals von Karsten und Kästner gegebnen Beweise, nicht vollkommen bündig seyen. Meinem eigenen, dort mitgetheilten Beweise würde ich gegenwartig einen andern hinzuzufügen wissen, der selbst auch von dem Grundsatze unabhängig ist, dessen ich dort mit Kästner mich bedient

habe. Hier dabei mich aufzuhalten, ist nicht nöthig, weil die ganze Lehre gewiſs genug ist. Nöthiger scheint es mir folgendes deutlich gesagt zu haben.

§. 4. Wenn $x + f$ ein Factor des Aggregates $x^n + Ax^{n-1} + \dots + Mx + N$ ist: so muſs $x = -f$ eine Wurzel der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} \dots + Mx + N = o$ seyn; weil das ganze Product sich vernullen muſs, indem durch diesen Werth des x ein Factor desselben, $x + f = o$ wird.

Da dergleichen Vernullungswerth, sogenannte Gleichungswurzel, bald bejaht, bald verneint, oder auch keines von beiden, also unmöglich seyn kann: so ist es nöthig, die Bedeutung des f an sich, in dieser Hinsicht so allgemein zu fassen, daſs man nichts weiteres darüber bestimmt, als daſs $-f$ die Gegengröſse des f ausmacht, welche dann auch für den Fall, da f weder bejaht noch verneint ist, ebenfalls weder bejaht noch verneint seyn muſs.

Für viele dabei vorkommende Erörterungen ist es bequem, den Wurzelwerth des x, nicht durch $-f$ sondern durch f ausdrücken; da denn der einfache Factor durch $x - f$, die einfache Wurzelgleichung durch $x - f = o$ zu schreiben ist. Und so wird es sehr verständlich seyn, wenn ich behaupte, daſs z. B. jedes kubische Aggregat

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x-f)(x-g)(x-h)$$

seyn muſs, indem f, g und h die drei Vernullungswerthe der drei einfachen Factoren des kubischen Aggregates, also die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 + Ax^2 + Bx + C = o$ bedeuten.

§. 5. Wer nun diese algebraisch einfachen Factoren nur bei der Gleichungstheorie kennen und benützen gelernt hat, kann leicht verleitet werden,

x — f für ihre allgemeine Form zu achten, in welcher nämlich f jede Gröſse (bejahte, verneinte oder unmögliche) bedeuten kann, die nur kein x enthält, vom x unabhängig ist; und dessen x keinen andern Coefficienten als 1 hat.

Aber die allgemeine Form desselben ist vielmehr m.x — f, weil auch durch mx — f = 0 gesetzt, vermittelst dieser Gleichung nur ein einziger Vernullungswerth $x = \frac{f}{m}$ für x bestimmt wird, indem auch m jede beliebige constante oder veränderliche, nur vom x selbst unabhängige Gröſse, bedeuten soll.

Allemal m = 1 vorauszusetzen, ist nur hinreichend für die Gleichungstheorie, wo es bequem und rathsam ist, das Aggregat des x allemal vorläufig so geordnet zu haben, daſs dessen höchstes Glied x^n des m entledigt sey.

Für andere Untersuchungen, namentlich für die hier beabsichtigte Zerlegung gebrochener Functionen, würde diese Ordnungsregel nicht gerathen seyn.

§. 6. Ich bemerke ferner, daſs es für die Gleichungstheorie, auch für das dahin gehörige Multipliciren und Dividiren, u. s. w., eben so rathsam als gewöhnlich allerdings ist, das zu behandelnde x-Aggregat, wie oben in §. 4. zu ordnen. Für die hier folgenden Zerlegungen und deren Gebrauch in der Integralrechnung, ist es dagegen rathsamer, wenn zum Beispiel X ein kubisches Aggregat ist,

dieses $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \mu x^3$

in dieser Ordnung aufzuführen; und auch bei höheren, oder den niedrigeren, den quadratischen Aggregaten, werde ich den Coefficienten des letzten höchsten Gliedes allemal durch μ bezeichnen. Dabei kann

nun folgender Lehrsatz als allgemein für jedes x-Aggregat vom n ten Grade verstanden und erwiesen vorausgesetzt werden, wenn wir ihn beispielsweise für ein cubisches Aggregat ausgedrückt und erwiesen haben.

Lehrsatz.

§. 7. **Sey $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \mu x^3$ ein kubisches Aggregat, dessen Coefficienten α, β, γ und μ allerlei Gröſsen seyn mögen, wenn sie nur kein x enthalten, vom x unabhängig sind: so ist allemal auch $X = \mu(x-f)(x-g)(x-h)$, indem f und g und h die Vernullungswerthe der x in den drei einfachen Factoren des X bedeuten.**

Beweis.

§. 8. Aus dem vorgelegten X folgt, daſs auch $\frac{X}{\mu} = x^3 + \frac{\gamma}{\mu} x^2 + \frac{\beta}{\mu} x + \frac{\alpha}{\mu}$ seyn muſs.

Da nun dieses Aggregat $= 0$ gesetzt, eine geordnete kubische Gleichung abgibt, welche drei Wurzeln $x = f$, $x = g$ und $x = h$ haben muſs: so muſs $\frac{X}{\mu} = (x-f)(x-g)(x-h)$, folglich auch $X = \mu(x-f)(x-g)(x-h)$ seyn.

Zusatz 1.

§. 9. Seyen $mx + a$, und $nx + b$ und $rx + c$, als die drei einfachen Factoren des kubischen Aggregates X gefunden: so müſste dieses Aggregat

$X = (mx + a)(nx + b)(rx + c)$

auch $= mnr\left(x + \frac{a}{m}\right)\left(x + \frac{b}{n}\right)\left(x + \frac{c}{r}\right)$ seyn; also mit $X = \mu(x-f)(x-g)(x-h)$ des Lehrsatzes

verglichen, allemal $\mu = mnr$ seyn; und die drei Vernullungswerthe dieser drei Factoren sind allemal

$$f = -\frac{a}{m};\ g = -\frac{b}{n} \text{ und } h = -\frac{b}{r}.$$

Wenn wir nun $X = \mu, F.G.H$ schreiben: so ist sowol F als G und H der Factoren-Form $x + a$ unterworfen; und bei dieser Form brauchen wir dann allerdings nur zwischen gleichen und ungleichen Factoren zu unterscheiden.

Zusatz 2.

§. 10. Da hieraus erhellet, daſs unter den drei einfachen Factoren eines kubischen Aggregates X, dessen μ nicht $= 1$ ist, wenigstens ein solcher Factor sich befinden muſs, der zum Coefficienten seines x eine andere Zahl als 1 hat: so erhellet, daſs wir bei einem solchen Aggregate nicht $x + a$, sondern $mx + a$ als die allgemeine Form seiner einfachen Factoren ansehen müssen; folglich zwei dergleichen Factoren $mx + a$ und $nx + b$, nicht bloſs, wenn sie einander gleich sind, also $m = n$ und $a = b$ haben, für einerlei Werth des x sich vernullen; sondern dieses auch schon geschehen muſs, wenn nur die Vernullungswerthe $x = -\frac{a}{m}$ und $x = -\frac{b}{n}$ einander gleich sind. Z. B. Die beiden einfachen Factoren $3x + 6$ und $x + 2$ sind einander nicht gleich, der erste ist ja das 3fache des zweiten: aber beide haben einerlei Vernullungswerth $x = -2$; und mögen in dieser Hinsicht gleich vernullbarn Factoren genannt werden.

Anmerkung.

§. 11. Für die gleich folgende Zerlegungstheorie ist es wichtig zu unterscheiden, ob das Aggregat aus Factoren besteht, die lauter eigenthümliche oder einige gemeinschaftliche Vernullungswerthe haben; wofür also die bloſse Unterscheidung zwischen gleichen und ungleichen Factoren nicht hinreicht. Obgleich hiedurch bei geübten Analysten keine eigentlichen Unrichtigkeiten zu erfolgen pflegen: so wollen wir doch bei unserm folgengen Vortrage immerfort genaue Rücksicht darauf nehmen.

Lehrsatz.

§. 12. Für die Integralrechnung ist es wichtig zu wissen, daſs z. B. jedes $\frac{Z}{N} = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x + \mu x^2}$ allemal in $= \frac{\mathfrak{A}}{a + mx} + \frac{\mathfrak{B}}{b + nx}$ kann zerlegt werden, so daſs $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die Zähler dieser beiden einfachen Brüche, vom x unabhängige, durch a, m, b und n bestimmbare Gröſsen sind, auch als solche können gefunden werden, wenn man $(a + mx)$ und $(b + nx)$ als die beiden einfachen Factoren des quadratischen N anzugeben, also dieses $N = \alpha + \beta x + \mu x^2$ als $= (a + mx).(b + nx)$ anzugeben weiſs.

Beweis.

§. 13. Die behauptete Zerlegung, $\frac{a + bx}{(a + mx)(b + nx)} = \frac{\mathfrak{A}}{a + mx} + \frac{\mathfrak{B}}{b + nx}$, ist als allgemein richtig erwiesen und gefunden, wenn man

ein solches $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ anzugeben weiſs, welches

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x = (b + nx)\,\mathfrak{A} + (a + mx)\,\mathfrak{B},$$

das ist, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x = b\mathfrak{A} + a\mathfrak{B} + (n\mathfrak{A} + m\mathfrak{B})\,x$ leistet, bei allen Werthen des x. Dazu aber wird erfordert

1) daſs $b\mathfrak{A} + a\mathfrak{B} = \mathfrak{a}$

und 2) daſs $n\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} = \mathfrak{b}$ sey; und durch diese beiden Gleichungen werden die beiden gesuchten Gröſsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ völlig bestimmt. Denn aus beiden Gleichungen

die $\mathfrak{B}$ eliminirt, gibt $\mathfrak{A} = \dfrac{a\mathfrak{b} - m\mathfrak{a}}{na - mb}$

und $\mathfrak{A}$ eliminirt, gibt $\mathfrak{B} = \dfrac{b\mathfrak{b} - n\mathfrak{a}}{mb - na}$,

wodurch also $\mathfrak{A} = \dfrac{a\mathfrak{b} - m\mathfrak{a}}{na - mb}$, und $\mathfrak{B} = -\dfrac{b\mathfrak{b} - n\mathfrak{a}}{na - mb}$ gefunden ist.

Anmerkung.

§. 14. Hiebei wird nun allerdings in den Lehrbüchern erinnert, daſs bei Gleichheit der beiden einfachen Factoren, sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unendlich groſs ergibt, und dadurch diese Zerlegung für den beabsichtigten Gebrauch in der Integralrechnung untauglich wird. Da die Gleichheit dieser beiden Factoren behaupten muſs, daſs $a + mx = b + nx$ sey, bei jedem Werthe des x: so wird dazu erfordert, daſs $a = b$ und $m = n$ sey. Hiedurch wird also $na - mb = o$, und

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x}{\alpha + \beta x + \mu x^2} = \frac{\;\frac{a\mathfrak{b} - m\mathfrak{a}}{o}\;}{a + mx} - \frac{\;\frac{b\mathfrak{b} - n\mathfrak{a}}{o}\;}{b + nx},$$ in diese

zwei unendlich groſse Brüche allerdings zerlegt gefunden, die auch, wegen $a\mathfrak{b} - m\mathfrak{a} = b\mathfrak{b} - n\mathfrak{a}$, und $a + mx = b + nx$, an absoluter Gröſse einander völlig gleich seyn müssen.

Da aber die unendliche Groſsheit nicht bloſs bei gleichen, sondern auch schon bei gleich-vernullbaren Factoren eintreten muſs: so ist es wohl rathsam, bei der ganzen Zerlegungsmethode diesen letzteren allgemeineren Grund ihrer erwähnten Unbrauchbarkeit vor Augen zu behalten.

In dieser Hinsicht wird es das rathsamste seyn, sich jedes vorgegebne N vermittelst der Wurzeln oder Vernullungswerthe der Gleichung $N = 0$ ausgedrückt zu denken; da wir dann allerdings nur zwischen gleichen oder ungleichen Vernullungswerthen zu unterscheiden haben.

Lehrsatz samt Beweis.

§. 15. Jedes $\frac{Z}{N} = \frac{a + bx}{\alpha + \beta x + \mu x^2}$ ist $= \frac{a + bx}{\mu(x-f)(x-g)}$, wenn f und g die beiden Vernullungswerthe des N, also die beiden Wurzeln der Gleichung $N = 0$ bedeuten; und nun ist es einleuchtend, daſs man $\mu \frac{Z}{N} = \frac{a + bx}{(x-f)(x-g)} = \frac{\mathfrak{F}}{x-f} + \frac{\mathfrak{G}}{x-g}$ mit constanten $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ gefunden hat, wenn man die vom x unabhängigen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ anzugeben weiſs, welche der Gleichung

$Z = \mathfrak{F}(x-g) + \mathfrak{G}(x-f)$ Genüge thun, bei allen Werthen des x.

Da nun zwei von diesen Werthen die $x = f$ und $x = g$ sind,

folglich 1) $\overset{x=f}{Z} = \mathfrak{F}.(f-g) + \mathfrak{G}.0$

und 2) $\overset{x=g}{Z} = \mathfrak{F}.0 + \mathfrak{G}(g-f)$ seyn muſs: so werden durch diese beiden Gleichungen ohne x, die beiden gesuchten Gröſsen

$\mathfrak{F} = \frac{a + bf}{f - g}$ und $\mathfrak{G} = \frac{a + bg}{g - f}$ so völlig bestimmt, daſs es keine andere als diese beiden constanten Werthe dafür geben kann; woraus nun folgt, daſs $\frac{Z}{(x-f)(x-g)} = \frac{\frac{a+bf}{f-g}}{x-f} - \frac{\frac{a+bg}{f-g}}{x-g}$ seyn muſs;

$$\text{folglich } \frac{Z}{N} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\frac{a+bf}{f-g}}{x-f} - \frac{\frac{a+bg}{f-g}}{x-g}\right\}$$

§. 16. Wenn aber die beiden Vernullungswerthe f und g einander gleich sind, und daher diese beiden Zerlegungsbrüche wegen $f - g = 0$ sich unendlich groſs, und somit für die Integralrechnung unmittelbar brauchbar sich nicht ergeben: so pflegt man mit folgender, zwar nicht so einfachen, doch brauchbaren Zerlegung sich zu begnügen.

Lehrsatz samt Beweis.

§. 17. Sey $\frac{Z}{N} = \frac{a + bx}{\mu(x-f)^2}$ so kann

$$\mu\frac{Z}{N} = \frac{a + bx}{(x-f)^2} = \frac{\mathfrak{F}'}{(x-f)^2} + \frac{\mathfrak{F}''}{x - f}$$

mit constanten $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ gefunden werden.

Denn es wird dazu nur erfordert,

daſs $Z = a + bx = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''(x-f)$ sey, bei allen Werthen des x; folglich auch bei dem einzelen Werthe $x = f$; wodurch wir zuvörderst erhalten, daſs

$$Z_{x=f} = a + bx = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''.0 = \mathfrak{F}' \text{ seyn muſs.}$$

Da nun ferner, wenn die drei Ausdrücke

$Z = a + bx = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''(x-f)$ bei allen Werthen ihres veränderlichen x sich gleich bleibend

seyn sollen, auch ihre drei Differentialquotienten $\frac{dZ}{dx} = \mathfrak{b} = \mathfrak{F}''$ einander gleich bleibend seyn müssen: so müssen sie auch bei dem einzelen Werthe $x = f$ einander gleich bleibend seyn; muſs also

$$\mathfrak{F}'' = \overset{x=f}{\frac{dZ}{dx}} = \mathfrak{b}$$ seyn. Daher hiemit

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}f}{(x-f)^2} + \frac{\mathfrak{b}}{x-f}\right\}$$ gefunden ist.

Zusatz.

§. 18. Um $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2}{(x-f)^3} = \frac{\mathfrak{F}'}{(x-f)^3} + \frac{\mathfrak{F}''}{(x-f)^2} + \frac{\mathfrak{F}'''}{x-f}$ mit constanten $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'''$ zu haben, muſs

1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''(x-f) + \mathfrak{F}'''(x-f)^2$ seyn, bei allen Werthen des x; müssen

also auch 2) die ersten Differentialquotienten

$$\mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}x = \mathfrak{F}'' + 2\,\mathfrak{F}'''(x-f)$$

und auch 3) die zweiten Differentialquotienten

$$2\mathfrak{c} = 2\mathfrak{F}'''$$ einander gleich bleibend seyn, bei allen Werthen des. x. Folglich auch bei dem einzelen Werthe $x = f$; wodurch nun

1) $\mathfrak{F}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}f + \mathfrak{c}ff$

2) $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}f$

und 3) $\mathfrak{F}''' = \mathfrak{c}$ bestimmt wird.

Um $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2+\mathfrak{d}x^3}{(x-f)^4} = \frac{\mathfrak{F}'}{(x-f)^4} + \frac{\mathfrak{F}''}{(x-f)^3} + \frac{\mathfrak{F}'''}{(x-f)^2} + \frac{\mathfrak{F}''''}{x-f}$ zu haben, muſs 1)

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2+\mathfrak{d}x^3 = \mathfrak{F}'+\mathfrak{F}''(x-f)+\mathfrak{F}'''(x-f)^2+\mathfrak{F}''''(x-f)^3$ seyn, bei allen Werthen des x; woraus sogleich folgt, daſs auch die ersten, und alle folgenden Differentialquotienten dieser beiden Gleichungsseiten einander

gleich bleibend seyn müssen; das ist

2) $\mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}x + 3\mathfrak{d}x^2 = \mathfrak{F}'' + 2\mathfrak{F}'''(x-\mathfrak{f}) + 3\mathfrak{F}^{IV}(x-\mathfrak{f})^2$

3) $2\mathfrak{c} + 2.3.\mathfrak{d}x = 2\mathfrak{F}''' + 2.3.\mathfrak{F}^{IV}(x-\mathfrak{f})$

4) $2.3.\mathfrak{d} = 2.3.\mathfrak{F}^{IV}$

bei allen Werthen des x; folglich auch bei jedem einzelen. Möchte man nun unter den einzelen Werthen wählen, welchen man wollte, so hätte man dann 4 Gleichungen zwischen lauter constanten gegebnen Gröſsen; wodurch also auch die vier $\mathfrak{F}$ als constante Gröſsen bestimmt werden.

Eine ziemlich bequeme Bestimmung dieser vier Gröſsen würde man allerdings schon erhalten, wenn man den einzelen Werth $x = 0$ ergriffe, wozu übrigens das Gesetz der Stetigkeit auch berechtigen würde. Weit bequemer aber fällt die Bestimmung aus, wenn wir $x = \mathfrak{f}$ wählen; weil wir dadurch sogleich

1) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} + \mathfrak{c}\mathfrak{f}\mathfrak{f} + \mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{f}\mathfrak{f} = \mathfrak{F}'$

2) $\mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}\mathfrak{f} + 3\mathfrak{d}\mathfrak{f}\mathfrak{f} = \mathfrak{F}''$

3) $\mathfrak{c} + 3\mathfrak{d}\mathfrak{f} = \mathfrak{F}'''$

4) $\mathfrak{d} = \mathfrak{F}''''$ erhalten.

§. 19. Besonders aus diesem letzten Beispiele erhellet nun hinreichend, wie man jedes

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{\mu(x-\mathfrak{f})^r} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\mathfrak{F}'}{(x-\mathfrak{f})^r} + \frac{\mathfrak{F}''}{(x-\mathfrak{f})^{r-1}} + \frac{\mathfrak{F}'''}{(x-\mathfrak{f})^{r-2}} + \ldots \frac{\mathfrak{F}^R}{x-\mathfrak{f}}\right.$$

mit lauter constanten $\mathfrak{F}$ finden könne; allemal vorausgesetzt, daſs auch Z eine ganze rationale Function des x, und auf's höchste nur ein x^{r-1} enthaltend sey. Daſs in solchem

$Z = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 \ldots\ldots + \mathfrak{r}x^{r-1}$ einige der Coefficienten auch $= 0$ gegeben seyn, und dadurch einige der $\mathfrak{F}$ ebenfalls $= 0$ sich ergeben können, versteht sich von selbst.

Aufgabe.

§. 20. **Für jedes ächt gebrochne und rationale** $\frac{Z}{N} =$

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^3+\ldots\mathfrak{l}x^l}{\mu.F.G.H\ldots\ldots L.M} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\mathfrak{F}}{F}+\frac{\mathfrak{G}}{G}+\frac{\mathfrak{H}}{H}\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{L}+\frac{\mathfrak{M}}{M}\right\}$$

jeden constanten Zähler $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ u. s. w. zu finden, vorausgesetzt, dafs $F = x - f$; $G = x - g$ u. s. w. lauter einsame Factoren des $\frac{N}{\mu}$ sind, auch dergleichen Factor nicht etwa auch ein Factor des Zählers Z sey.

Auflösung.

§. 21. Es ist $\frac{Z}{F.G.H\ldots L.M} = \frac{\mathfrak{F}}{F} + \frac{X}{R}$, wenn $R = G.H\ldots L.M$, also das Product aus allen restirenden Factoren aufser F bedeutet, folglich X eine rationale Function des x vom $(m-1)$ten Grade ausmacht; und das zur hergesetzten Gleichung geforderte constante $\mathfrak{F}$ ist gefunden, wenn man ein constantes $\mathfrak{F}$ anzugeben weifs, welches
$Z = \mathfrak{F}R + XF$ gibt, bei jedem Werthe des veränderlichen x; also auch bei $x = f$.

Da nun $\overset{x=f}{Z} = \mathfrak{F}.\overset{x=f}{R} + X.\overset{x=f}{F} = \mathfrak{F}.\overset{x=f}{R} + X.o = \mathfrak{F}.\overset{x=f}{R}$ seyn mufs, so mufs $\mathfrak{F} = \underset{x=f}{\left(\frac{Z}{R}\right)}$ seyn.

Zusatz.

§. 22. Allerdings kann nun $R = \frac{1}{\mu}.\frac{N}{F}$ durch Division gefunden, und daraus auf $\overset{x=f}{R}$ geschlossen

werden. Da wir aber nicht das allgemeine R mit veränderlichem x, sondern nur das auf x = f eingeschränkte $\overset{x=f}{R}$ zu wissen nöthig haben: so können wir aus Kapitel XVIII. benutzen, dafs dieses

$$\overset{x=f}{R} = \frac{1}{\mu}\cdot\overset{x=f}{\frac{dN}{dF}} = \frac{\overset{x=f}{dN : dx}}{\mu}\text{, und demnach}$$

$$\mathfrak{F} = \mu\cdot\overset{x=f}{\left(\frac{Z}{dN : dx}\right)}\text{ seyn mufs.}$$

Eben so mufs $\mathfrak{G} = \mu\cdot\overset{x=g}{\left(\frac{Z}{dN : dx}\right)}$ seyn, u. s. w.

Daher wir nun wissen, dafs

$$\frac{Z}{N} = \frac{\overset{x=f}{(Z : dN : dx)}}{x-f} + \frac{\overset{x=h}{(Z : dN : dx)}}{x-g} + \frac{\overset{x=g}{Z : dN : dx}}{x-h} + \text{u. s. w.}$$

seyn mufs.

Beispiel.

§. 23. Sey $\frac{Z}{N} = \frac{8+12x}{6x^3-7x^2+1}$ gegeben, und man habe gefunden, dafs $x = 1$ der eine, $x = \frac{1}{2}$ der andere, und $x = -\frac{1}{3}$ der dritte Vernullungswerth des $N = 6(x-1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$ sey: so hat man $\frac{dN}{dx} = 18x^2 - 14x$, und demnach

$$\mathfrak{F} = \frac{8+12}{18-14} = 5;\ \mathfrak{G} = \frac{8+6}{\frac{9}{2}-7} = -\frac{28}{5};\ \mathfrak{H} = \frac{8-4}{\frac{18}{3}+\frac{14}{3}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{also } \frac{8+12x}{6x^3-7x^2+1} = \frac{5}{x-1} - \frac{28}{5(x-\frac{1}{2})} + \frac{3}{5(x+\frac{1}{3})},$$

$$\text{welches auch} = \frac{5}{x-1} - \frac{56}{5(2x-1)} + \frac{9}{5(3x+1)},$$

und vollkommen richtig ist.

Anmerkung.

§. 24. In der Aufgabe §. 20. ist vorausgesetzt, daſs der Zähler Z und der Nenner N, irgend einen gemeinschaftlichen Factor nicht mehr haben sollen. Gesetzt indessen, es sey uns unbemerkt dergleichen zurück geblieben: so wird die Zerlegung nach §. 21. dennoch richtig gefunden werden. Wäre z. B. der Factor H = x — h auch im Z vorhanden: so würde sich der partielle Zähler $\mathfrak{H} = \left(\frac{Z}{dN:dx}\right)^{x=h}$ offenbar = o ergeben müssen.

Wenn aber in dem Nenner N irgend ein Factor F = x — f, einmal oder zweimal u. s. w. enthalten wäre: so würde sich einmal oder zweimal u. s. w. ein partieller Zähler unendlich groſs ergeben, und deshalb eine andere Zerlegung zu ergreifen seyn. Es ist hinreichend, in dieser Hinsicht das folgende Beispiel vorzunehmen, dessen Nenner drei einander gleiche F, zwei einander gleiche G, und übrigens lauter einsame Factoren enthält.

Zusatz zur vorigen Aufgabe und Auflösung.

§. 25. Wenn in einem rationalen und ächt gebrochenen $\frac{Z}{N}$, der Nenner N = μ.FFFGGHIK wäre: so würde man $\frac{\mu.Z}{N} = \frac{\mathfrak{F}'}{F^3} + \frac{\mathfrak{F}''}{F^2} + \frac{\mathfrak{F}'''}{F} + \frac{\mathfrak{G}'}{G^2} + \frac{\mathfrak{G}''}{G} + \frac{\mathfrak{H}}{H} + \frac{\mathfrak{I}}{I} + \frac{\mathfrak{K}}{K}$ mit lauter constanten Zählern finden können.

Denn jeder von den Zählern $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{K}$. welcher einem einsamen Factor zugehört, ist wie in §. 20.,

also $\mathfrak{H} \overset{x=h}{=} Z : dN : dx$, und $\mathfrak{I} \overset{x=i}{=} Z : dN : dx$, u. s. w. zu finden.

Um aber die Zähler $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'''$ für den kubischen Factor $F^3 = (x-f)^3$ zu finden, denken wir uns $\mu . \frac{Z}{N} = \frac{\mathfrak{F}'}{F^3} + \frac{\mathfrak{F}''}{F^2} + \frac{\mathfrak{F}'''}{F} + \frac{X}{R}$ angesetzt, also $R = \frac{N:\mu}{FFF} = GG.HIK$ bedeutend: so werden wir gar leicht durchsehen, daſs dieser Ansatz durch drei constante $\mathfrak{F}$ sich sichtig gewähren muſs. Denn es wird dazu erfordert,

daſs $Z = (\mathfrak{F}' + \mathfrak{F}''F + \mathfrak{F}'''FF)R + F^3X$ sey, bei allen Werthen des veränderlichen x. Wenn aber dieses Statt finden soll, so müssen zweitens auch die ersten Differentialquotienten, und drittens auch die zweiten Differentialquotienten dieses Ansatzes einander gleich bleiben bei allen Werthen des x; also auch bei dem Werthe $x = f$.

Da nun bei diesem $x = f$ sich $F \overset{x=f}{=} x - f \overset{x=f}{=} 0$ ergibt, und dadurch viele Glieder in den drei Gleichungen sich vernullen müssen, auch $\frac{dF}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$ ist, und die drei $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'''$ als constante Gröſsen gefordert werden: so werden uns nun folgende drei sehr bequeme Gleichungen eingeliefert.

$$x \;\overline{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}\; f$$

1) $Z = \mathfrak{F}'.R.$

2) $\frac{dZ}{dx} = \mathfrak{F}' \frac{dR}{dx} + \mathfrak{F}''R$

3) $\frac{ddZ}{dx\,dx} = \mathfrak{F}' \frac{ddR}{dx\,dx} + 2\mathfrak{F}'' \frac{dR}{dx} + 2\,\mathfrak{F}'''R$

Dafs also nach und nach

$$x = f$$

$$1)\ \mathfrak{F}' = \frac{Z}{R}$$

$$2)\ \mathfrak{F}'' = \frac{1}{R}\left(\frac{dZ}{dx} - \mathfrak{F}'\frac{dR}{dx}\right)$$

$$3)\ \mathfrak{F}''' = \frac{1}{2R}\left\{\frac{ddZ}{dx\,dx} - \mathfrak{F}'\frac{ddR}{dx\,dx} - 2\mathfrak{F}''\frac{dR}{dx}\right\}$$ können gefunden werden. (Und wenn der Factor F viermal im N vorkäme: so würde, um auch $\mathfrak{F}^{IV}$ zu finden,

noch $4)\ \frac{dddZ}{dx\,dx\,dx}$ ($x = f$) zu benutzen seyn.)

Für den quadratischen Factor $GG = (x-g)^2$ wird eben so

$$x = g$$

$$1)\ \mathfrak{G}' = \frac{Z}{R}$$

$$2)\ \mathfrak{G}'' = \frac{1}{R}\left(\frac{dZ}{dx} - \mathfrak{G}'\frac{dR}{dx}\right)$$ gefunden.

Demnach haben wir nun

im $\frac{Z}{N} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathfrak{F}'}{F^3} + \frac{\mathfrak{F}''}{F^2} + \frac{\mathfrak{F}'''}{F} + \frac{\mathfrak{G}'}{G^2} + \frac{\mathfrak{G}''}{G}\right) + \frac{X}{\mu R}$

die sämtlichen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ als constante Zähler gefunden.

Für das übrige $\frac{X}{\mu R} = \frac{\mathfrak{H}}{\mu H} + \frac{\mathfrak{I}}{\mu I} + \frac{\mathfrak{K}}{\mu K}$ kann jeder Zähler nach §. 22. gefunden werden.

Z. B. für $H = x - h$, hat man $\mathfrak{H} = \mu\left(\frac{Z}{dN : dx}\right)$; u. s. w.

Beispiel.

§. 26. Sey $\frac{Z}{N} = \frac{2 + x^3}{6x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 2} = \frac{2 + x^3}{6(x-1)^3(x+\frac{1}{3})}$ gegeben (dessen N also auch $= 2(x-1)^3(3x+1) = (x-1)^2 \cdot (2x-2).(3x+1)$ ist): so wird dieses N dreimal nach einander durch $x = 1$, und einmal durch $x = -\frac{1}{3}$ vernullt.

Wir haben nun $6\frac{Z}{N} = \frac{2 + x^3}{(x-1)^3(x+\frac{1}{3})}$; und wenn wir die im vorigen §. für $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, und $\mathfrak{F}'''$ gefundenen Formeln auf dieses Beispiel einschränken, in welchem $R = x + \frac{1}{3}$ ein einziger einsamer Factor ist, der also $\frac{dR}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$ und $\frac{ddR}{dx\,dx} = 0$ gibt: so haben wir:

$$1)\ \mathfrak{F}' = \left(\frac{Z}{R}\right)^{x\,=\,1} = \frac{3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$$

$$2)\ \mathfrak{F}'' = \frac{1}{R}\left\{\frac{dZ}{dx} - \mathfrak{F}'\right\} = \frac{3}{4}\left\{3 - \frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{16}$$

$$3)\ \mathfrak{F}''' = \frac{1}{2R}\left\{\frac{ddZ}{dx\,dx} - 2\mathfrak{F}''\right\} = \frac{3}{8}\left\{6 - \frac{9}{8}\right\} = \frac{117}{64}.$$

Da nun für den einsamen Factor $R = x + \frac{1}{3}$, dessen Vernullungswerth r genannt, $r = -\frac{1}{3}$ ist, der ihm zugehörige partielle Nenner

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{Z}{dN : dx}\right)^{x\,=\,r} = \left(\frac{2 + x^3}{24x^3 - 48x^2 + 24x}\right)^{x\,=\,-\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{2 - \frac{1}{27}}{-\frac{24}{27} - \frac{48}{9} - \frac{24}{3}} = -\frac{53}{384}$$ ist: so haben wir

dieses $Z = \frac{1}{6}\left\{\frac{9}{4(x-1)^3} + \frac{9}{16(x-1)^2} + \frac{117}{64(x-1)} - \frac{53}{384(x+\frac{1}{3})}\right\}$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{39}{16(x-1)} - \frac{53}{96(3x+1)}\right\},$$

und wirklich $= \frac{2 + x^3}{6(x-1)^3(x+\frac{1}{3})}$

§. 27. Wenn ein einfacher Factor $F = x - f$ einen unmöglichen Vernullungswerth $x = f$ hat: so ist auch der ihm zugehörige Zerlegungsbruch $\frac{\mathfrak{F}}{x - f}$ dieser Unmöglichkeit unterworfen. Wenn nun von zwei unmöglichen Faktoren des N, der eins $F = x - a - i$, der andere $G = x - a + i$ ist: so ist ihr Product $FG = x^2 - 2ax + a^2 - ii$ ein quadratischer Factor mit möglichen Coefficienten $-2a$, $+aa$ und $-ii$. Auch läſst sich darthun, daſs dann die Summe $\frac{\mathfrak{F}}{F} + \frac{\mathfrak{G}}{G} = \frac{A + Bx}{FG}$ mit möglichen Coefficienten A und B ist.

Ueberdies aber kann man, wenn im gegebenen $\frac{Z}{N}$ der Nenner N einen quadratischen Factor $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2$ hat, dessen einfache Factoren unmöglich seyn würden, sogleich

$\frac{Z}{N} = \frac{A + Bx}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2} + \frac{X}{R}$ ansetzen, und A und B nach obiger Methode finden.

Mehr über die unmöglichen Factoren und ihren Gebrauch in der Integralrechnung werden wir anführen, wo sogleich dieser Gebrauch zu zeigen ist.

Siebenundzwanzigstes Capitel.

Einige Functionen vermittelst ihrer Differential-quotienten in Reihen zu zerlegen.

Erklärung.

§. 1. Durch $\overset{u=b}{U}$ wollen wir den Werth angedeutet wissen, welchen die Function U erhält, wenn man statt jedes u in ihr ein b geschrieben fordert.

Am häufigsten wird $\overset{x=o}{U}$ gebraucht, das u der Function U vernullt gefordert werden. Nächstdem auch $\overset{u=1}{U}$; wodurch das u der Function auf den Werth $=$ 1 eingeschränkt wird.

Am bequemsten wird bisweilen die verlangte Einschränkung des u, über einem Gleichungszeichen, bisweilen auch ein für allemal über einer ganzen Säule oder Zeile geschrieben; wie es ebenfalls aus den nächsten Beispielen, oder doch den nachher folgenden Anwendungen erhellen wird.

Beispiel 1. Sey $U = (a + u)^n$, so ist

$$\begin{array}{lll} u=o & u & \overset{}{=\!=\!=\!=} \quad o \\ U & = (a + u)^n & =\!=\!=\!= \; a^n \\ \frac{dU}{du} & = n(a + u)^{n-1} & = na^{n-1} \\ \frac{ddU}{dx\,dx} & = n.n-1.(a + u)^{n-2} & = n.n-1.a^{n-2} \end{array}$$

; indem man leicht sieht, dafs das $u = o$ für die drei unter ihm stehenden Ausdrücke gelten soll.

Beispiel 2. Sey $U = u - 1$, so ist

$$U = u - 1 \overset{(u = 1)}{=\!=\!=} 1 - 1 = 0$$

Ferner $U^2 = (u-1)^2 \overset{(u = 1)}{=\!=\!=} 0.0$

ferner $2U \frac{dU}{du} = 2(u-1) \overset{(u = 1)}{=\!=\!=} 2.0$

Partieller Lehrsatz.

§. 2. Sey U eine Function des u, welche es wolle, nur dafs kein $\overset{u=0}{\frac{{}^r dU}{du^r}}$ (keiner von ihren Differentialquotienten bei vernulltem u) etwas unendlich grofses gebe: so mufs

$$U = \overset{u=0}{U} + \overset{u=0}{\frac{dU}{1.du}}.u + \overset{x=0}{\frac{d^2U}{1.2.du^2}}.u^2 + \overset{x=0}{\frac{d^3U}{1.2.3.du^3}}.u^3 + \ldots,$$

seyn, und ist hiermit

$$U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.u + \mathfrak{C}.u^2 + \mathfrak{D}.u^3 + \ldots$$

gefunden, nämlich U in eine Reihe zerlegt, die nach ganzen bejahten Dignitäten des u fortgeht, und deren Coefficienten lauter von u unabhängige, also insofern constante, und auch lauter endliche Gröfsen sind; womit gar wohl besteht, dafs einige derselben sich $= 0$ ergeben mögen.

Beweis.

§. 3. Kann und soll es angenommen werden, dafs es eine solche Reihe gibt, also $U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}u + \mathfrak{C}u^2 + \mathfrak{D}u^3 + \ldots$ gesetzt wer-

den könne: so muſs

auch $\frac{dU}{du} = 1.\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}.u + 3\mathfrak{D}u^2 + 4\mathfrak{E}u^3 + \ldots$

auch $\frac{d^2U}{du^2} = 2\mathfrak{C} + 2.3\mathfrak{D}u + 3.4\mathfrak{E}u^2 + \ldots$

auch $\frac{d^3U}{du^3} = 2.3\mathfrak{D} + 2.3.4\mathfrak{E}u + \ldots$

u. s. w. bei allen Werthen des u, folglich, nach dem Gesetze der Stetigkeit, auch bei u = o seyn; muſs also unter der schon geforderten Bedingung, daſs kein $\frac{d^rU}{du^r}$ für u = o etwas unendlich groſses gebe, nicht

nur $U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.o + \mathfrak{C}.o.o + \mathfrak{D}.o.o.o + \mathfrak{E}.o.o.o.o + o$

sondern

auch $\frac{dU}{du} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}.o + 3\mathfrak{D}.o.o + 4\mathfrak{E}.o.o.o + o$

auch $\frac{d^2U}{du^2} = 2\mathfrak{C} + 2.3\mathfrak{D}.o + 3.4\mathfrak{E}.o.o + o$

auch $\frac{d^3U}{du^3} = 2.3\mathfrak{D} + 2.3.4\mathfrak{E}.o +$ dergestalt seyn, daſs keines von denen mit o, oder o.o, oder o.o.o, u. s. w. factorirten Gliedern etwas anders als = o zu geben vermag: weil ja weder dessen etwaniges $\mathfrak{B}$, noch $\mathfrak{C}$, oder $\mathfrak{D}$, u. s. w. ein Unendlichgroſses geben kann; indem ja sonst, wenn zum Beispiel $\mathfrak{D}$ etwas unendlich groſses seyn sollte, auch $\frac{d^rU}{du^r} = 2.3\mathfrak{D} +$ u. s. w. unendlich groſs sich ergeben müſste, gegen die Bedingung des Lehrsatzes.

Uebrigens sehen wir auch hier die hypothetisch benutzte Reihe, durch ihre Benutzung selbst, als wirklich vorhanden gerechtfertigt; indem ja der Er-

folg es beweiset, dafs ihre sämmtlichen Coefficienten, 𝔄, 𝔅, ℭ, u. s. w. nach und nach sich ergeben müssen.

Beispiel 1.

§. 4. Sey $U = (a+u)^n$	lich $\overset{u=0}{U} = a^n$.
so ist $\frac{dU}{du} = n(a+u)^{n-1}$	$\frac{dU}{du} = \frac{n}{1}\, a^{n-1}$
$\frac{d^2U}{du^2} = n.n-1.(a+u)^{n-2}$	$\frac{d^2U}{1.2.du^2} = \frac{n.n-1}{1.2}\, a^{n-2}$
$\frac{d^3U}{du^3} = n.n-1.n-2.(a+u)^{n-3}$	$\frac{d^3U}{1.2.3.du^3} = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\, a^{n-3}$
u. s. w. Folg-	u. s. w.

Vermöge des Lehrsatzes also

$$(a+u)^n = a^n + \frac{n}{1}\, a^{n-1} u + \frac{n.n-1}{1.2}\, a^{n-2} u^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\, a^{n-3} u^3 + \ldots$$

Anmerkung.

§. 5. Diese gewöhnliche Binomialreihe ist von uns allerdings in ihrer ganzen Allgemeinheit schon vor der Differentialrechnung erwiesen gefordert. (Vorerinner. V. §. 2.) Ehe man dergleichen bündige elementarische Beweise gefunden hatte, war es wesentlich beachtungswerth, dafs man vermittelst der Differentialquotienten selbst, ihre Allgemeinheit erweisen kann.

Indem man nämlich das Binomialtheorem

$$(a+b)^r = a^r + r.a^{r-1} b + \frac{r.r-1.}{1.2}\, a^{r-2} b^2 + \ldots.$$

blofs für ganze bejahte Exponenten r erwiesen fordert, wie es leicht zu erweisen ist: so wird daraus durch die Schlüsse VI. §. 1. auch

I) der Differentialquotient $\frac{d.x^r}{dx} = r x^{r-1}$ nur für alle ganze bejahte Zahlen r gefolgert.

Ganz unabhängig vom Binomialtheorem ist nun schon in VI. §. 66. es

II) erwiesen, daſs $\frac{d.XY}{dx} = Y\frac{dX}{dx} + X\frac{dY}{dx}$ seyn muſs; und diese beiden Sätze reichen hin, um bündig darzuthun, daſs auch $\frac{d.x^n}{dx} = n x^{n-1}$ seyn muſs, für jeden Werth des n.

Denn 1) sey $n = \frac{p}{q}$, welcher bejahte Bruch es wolle, so kann man dafür verlangen, daſs er durch ganze bejahte Zahlen p und q ausgedrückt sey. Da nun $x^{\frac{p}{q}} = z$ gesetzt, uns $x^p = z^q$ gibt: so folgt aus I) daſs

$px^{p-1}dx = qz^{q-1}dz$, also auch $\frac{dz}{dx} = \frac{p}{q}.\frac{x^{p-1}}{z^{q-1}}$, das ist,

$$\frac{d.x^{\frac{p}{q}}}{dx} = \frac{p}{q}.\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q}.\frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$$ seyn muſs.

Ferner 2) sey $n = -\frac{p}{q}$, so haben wir, daſs $x^{-\frac{p}{q}} = z$ gesetzt, $1 = z.x^{\frac{p}{q}}$ seyn muſs, also $d.z.x^{\frac{p}{q}} = d.1 = 0$

durch II) also auch $x^{\frac{p}{q}}.dz + z.d.x^{\frac{p}{q}} = 0$. Durch den schon erwiesenen Satz

1) also $x^{\frac{p}{q}}dz + z.\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx = 0$, folglich

$\frac{dz}{dx} = -z.\frac{p}{q}x^{-1}$, das ist $\frac{dz}{dx} = -\frac{p}{q}x^{-\frac{p}{q}-1}$, das ist

$$\frac{d.x^{-\frac{p}{q}}}{dx} = -\frac{p}{q}x^{-\frac{p}{q}-1}.$$

Da nun hiermit die Richtigkeit des ersten Differentialquotienten $\frac{d.x^n}{dx} = nx^{n-1}$ für alle bejahte und verneinte, auch gebrochenem Werthe des n, folglich auch für jeden irrationalen, und algebraisch unmöglichen Werth des n, erwiesen ist; der zweite Differentialquotient des x^n aber ein erster der Function nx^{n-1} ist, u. s. w.: so ist eben dadurch auch die Form der höhern Differentialquotienten, welche im Beispiel 1. §. 4. gebraucht werden, und somit das Binomialtheorem für jedes n erwiesen, auch wenn es elementarisch erwiesen nur für n = 1 vorausgesetzt wird.

Beispiel 2.

§. 6. Allgemeiner sey $U = X^n$ und X eine Function von x, welche es wolle, nur daſs kein $\frac{d^r X^n}{dx^r}$ (für $x = o$) sich unendlich groſs ergebe: so kann man, in dem partiellen Lehrsatze u = x gesetzt,

für $X^n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \ldots$

die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, u. s. w. allemal finden, als

u=o, x = o

$$\mathfrak{A} = U = X$$

$$\mathfrak{B} = \frac{dU}{du} = nX^{n-1}\frac{dX}{dx}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{d^2U}{2du^2} = \frac{1}{2}\left\{nX^{n-1}\frac{d^2X}{dx^2} + n.n-1.X^{n-2}.\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right\}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{d^3U}{2.3du^3} = \frac{1}{6}\left\{nX^{n-1}\frac{d^3X}{dx^3} + 3.n.n-1.X^{n-2}\frac{dX}{dx}.\frac{d^2X}{dx^2} + n.n-1.n-2.X^{n-3}\left(\frac{dX}{dx}\right)^3\right\}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{d^4U}{2.3.4dx^4} = \frac{1}{24}\left\{nX^{n-1}\frac{d^4X}{dx^4} + n.n-1.X^{n-2}.\left[4\frac{dX}{dx}\frac{d^3X}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2\right] + 6.n.n-1.n-2.X^{n-3}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) + n.n-1.n-2.n-3.X^{n-4}\left(\frac{dX}{dx}\right)^4\right\}$$

§. 7. Auf $X = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3$ angewandt,

$$\text{hat man } \frac{dX}{dx} = \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c}x + 3\mathfrak{d}x^2, \text{ also } \frac{dX}{dx}\Big|_{x=0} = \mathfrak{b}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 2\mathfrak{c} + 2.3\mathfrak{d}x, \text{ also } \frac{d^2X}{dx^2} = 2\mathfrak{c}$$

$$\frac{d^3X}{dx^3} = 2.3\mathfrak{d}, \quad \text{also } \frac{d^3X}{dx^3} = 2.3\mathfrak{d}$$

Demnach $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}^n$ und $\mathfrak{B} = n.\mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{C} = n\mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{c} + \frac{n.n-1.}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}\mathfrak{b}^2$$

$$\mathfrak{D} = n\mathfrak{a}^{n-1}\mathfrak{d} + \frac{n.n-1.}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}\mathfrak{b}.2\mathfrak{c} + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\mathfrak{a}^{n-3}\mathfrak{b}^3$$

$$\mathfrak{E} = n\mathfrak{a}^{n-1}.0 + \frac{n.n-1.}{1.2}\mathfrak{a}^{n-2}\left\{\mathfrak{b}.2\mathfrak{d} + \mathfrak{c}^2\right\}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\mathfrak{a}^{n-3}\mathfrak{b}^2\,3\mathfrak{c} + \frac{n.n-1\,n-2.n-3.}{1.2.3.4}\mathfrak{a}^{n-4}\mathfrak{b}^4$$

§. 8. Für $X = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$

hat man $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$

$= 1, \alpha, \beta, \gamma$, also

$\mathfrak{A} = 1$ und $\mathfrak{B} = n\alpha$

$$\mathfrak{C} = n\beta + \frac{n.n-1.}{1.2}\alpha^2$$

$$\mathfrak{D} = n\gamma + \frac{n.n-1.}{1.2}\alpha.2\beta + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\alpha^3$$

$$\mathfrak{E} = n.0 + \frac{n.n-1.}{1.2}(\alpha.2\gamma + \beta^2)$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\alpha^2.3\beta + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\alpha^4$$

§. 9. Wäre die Stammgröfse X nicht viergliedrig, wie in §. 7. und §. 8 gegeben, sondern nur das trinomische

$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2)^n = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4+\ldots\ldots$

zu finden verlangt, so hat man in den Werthen der Coefficienten, wie sie in §. 7. angegeben sind, blofs die Glieder wegzulassen, welche $\mathfrak{d}$ zum Factor haben.

In der neuern Analyse wird es häufig benutzt, dafs jedes $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2)^n$ auch

$= \mathfrak{a}^n\left(1+\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}x+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}x^2\right)^n$ ist, also die trinomische Stammgröfse auch der Form $1+\alpha x+\beta x^2$ kann unterworfen werden, wofür man die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... auch sogleich aus §. 8. abnehmen kann, indem man nur das γ des dortigen viergliedrigen X für $= 0$ zu achten braucht.

Auch nur eines viergliedrigen X werden wir für unsere Anwendungen des höheren Calculs niemals bedürfen; daher es uns nicht nöthig ist, auch für ein 5gliedriges, 6gliedriges, und sogar für ein unbestimmt vielgliedriges (polynomisches) X die Coefficienten wirklich zu finden.

Beispiel 3.

§. 10. Sey U = sin arc z, also U eine transcendente Function des Bogens z, und man verlangt den Sinus durch die Bogenlänge z ausgedrückt zu wissen: so wird aus IX. §. 35. benutzt, dafs

wir für $U = \sin z$ haben

$$\frac{dU}{dz} = \cos z$$

ferner

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -\sin z$$

$$\frac{d^3U}{dz^3} = -\cos z$$

$$\frac{d^4U}{dz^4} = \sin z$$

$$\frac{d^5U}{dz^5} = \cos z$$

u. s. w. Folglich $z = 0$

$$U = \sin 0 = 0$$

$$\frac{dU}{1\,dz} = \cos 0 = 1$$

$$\frac{d^2\,U}{1.2.dz^2} = -\frac{\sin 0}{1.2} = -0$$

$$\frac{d^3\,U}{1.2.3.dz^3} = -\frac{\cos 0}{1.2.3} = -\frac{1}{1.2.3}$$

$$\frac{d^4\,U}{1.2.3.4\,dz^4} = \frac{\sin 0}{1.2.3.4} = 0$$

$$\frac{d^5\,U}{1.2.3.4.5\,du^5} = \frac{\cos 0}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

u. s. w.

Vermöge des Lehrsatzes also

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2...6.7} + \frac{z^9}{1.2.....8.9} - ...$$

Auf dieselbe Weise läſst sich nun auch

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{1.2...6.7.8} - ...$$

finden, indem man für $U = \cos z$ benutzt, daſs $\frac{dU}{dz} = -\sin z$, folglich $\frac{d^2\,U}{dz^2} = -\cos z$, folglich $\frac{d^3\,U}{dz^3} = \sin z$, folglich $\frac{d^4\,U}{dz^4} = \cos z$ ist, u. s. w.

Aus diesen beiden Reihen läſst sich dann

$$\sin \text{vers} = (1 - \cos z) = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} ...$$

desgleichen

$$\cos \text{vers}\, z = (1 - \sin z) = 1 - z + \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1.2...5.6.7} - ...$$

sogleich folgern. Was aber die Reihen

$$\operatorname{tang} z = z + \frac{z^3}{1.3} + \frac{2z^5}{1.3.5} + \frac{17z^7}{1.3.5.7.3} + \frac{62z^9}{1.3.5.7.9.3} + \ldots \text{ und}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{1.3} - \frac{z^3}{1.3.5.3} - \frac{2z^5}{1.3.5.7.3.3} - \frac{z^7}{1.3.5.7.9.5} - \ldots$$

betrifft: so würden sie uns hier wegen der vielen Glieder, in welche sich ihre höheren Differentialen zerlegen, ziemliche Arbeit machen. Weniger mühsam könnten sie späterhin durch den Integral-Calcul gefunden werden. Da indessen die beiden Reihen für *sinus* und *cosinus* so vorzüglich einfach und convergent sich ergeben haben: so pflegt man meistens jener beiden sich zu bedienen, welches wegen $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, auch in Hinsicht der Secante wegen

$\sec = \frac{1}{\cos z}$, u. s. w. meistens gut geschehen kann. Uebrigens sind die Reihen für sin z und cos z auch schon in XV. §. 22 und 23. zwar ebenfalls vermittelst der Differentialquotienten, doch auf eine andere Weise gefunden.

Beispiel 4.

§. 11. Sey $U = \operatorname{arc} \sin x$, so ist des partiellen Lehrsatzes $U' = z = \operatorname{arc} \sin x$, und das u des Lehrsatzes ist der Sinus x in Capitel IX.; also auch

$$\overset{u=0}{\frac{dU}{du}} = \overset{x=0}{\frac{dz}{dx}} \text{ und } \overset{u=0}{\frac{ddU}{du^2}} = \overset{x=0}{\frac{ddz}{du^2}};$$ daher wir in den dort schon gefundenen Differentialquotienten ihr $x = 0$ zu setzen, und aus dem Lehrsatze sogleich auf die Reihe

$$\operatorname{arc} \sin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3.x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \text{ zu}$$

schliefsen haben.

Eben so kann für $U = \text{arc tang}\, x$, mit Benutzung der nach IX. §. 35. gehörig zu findenden Differentialquotienten, durch den Lehrsatz sogleich auf die Reihe

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots\ldots$$ geschlossen werden.

Anmerkung.

§. 12. Das Verfahren nach dem vorigen von mir sogenannten partiellen Lehrsatze ist schon lange von den Analysten gebraucht, und nur etwa mit besonderer Deutlichkeit von mir dargestellt und erwiesen worden. Der folgende allgemeine Lehrsatz aber, welcher den partiellen mit umfaſst, ist meines Wissens neu. Wegen des darin gebrauchten e will ich doch, einiger Leser wegen, ausdrücklich an X. §. 13. erinnern, daſs nämlich e nicht etwa gerade die Basis der natürlichen Logarithmen bedeuten solle.

Allgemeiner Lehrsatz.

§. 13. Sey U eine Function von u, welche es wolle, so muſs

$$U = \overset{u=e}{U} + \overset{u\,=\!=\!=\,e}{\frac{dU}{1.du}\cdot\frac{du}{dH}}\cdot H + \overset{u\,=\!=\!=\!=\!=\,e}{\frac{d^2U}{1.2.du^2}\cdot\frac{du^2}{dH^2}}\cdot H^2$$

$$+ \overset{u\,=\!=\!=\!=\!=\,e}{\frac{d^3U}{1.2.3.du^3}\cdot\frac{du^3}{dH^3}}\cdot H^3 \ldots\ldots + \overset{u\,=\!=\!=\!=\!=\,e}{\frac{d^rU}{1.2.3\ldots r.du^r}\cdot\frac{du^r}{dH^r}} H^r + \ldots$$

und $U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.H + \mathfrak{C}.H^2 + \mathfrak{D}.H^3 \ldots\ldots + \mathfrak{R}.H^r + \ldots$ seyn, als eine Reihe mit endlichen und constanten (von u unabhängigen) Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$... sich ergeben, wenn man zur *Hülfsfunction* H irgend eine

von denen Functionen des u gewählt hat, welche

1) uns $\overset{u=e}{H} = 0$, folglich auch $\overset{u=e}{H^r} = 0$ gibt; und wenn man

2) für e eine von denen Gröfsen gewählt hat, bei welcher nict $\overset{u=e}{\frac{du}{dH}}$, folglich auch kein $\overset{u=e}{\left(\frac{du}{dH}\right)^r}$ sich unendlich grofs, auch

3) kein $\overset{u=e}{\frac{d^r U}{du^r}}$ unendlich grofs sich ergibt.

Beweis.

§. 14. Kann und soll
$U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}H + \mathfrak{C}H^2 + \mathfrak{D}H^3 \ldots + \mathfrak{R}H^r$ seyn bei allen Werthen des u, so mufs

auch $\frac{dU}{dH} = 1 . \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}H + 3 . \mathfrak{D}H^2 \ldots + r . \mathfrak{R}H^{r-1}$

auch $\frac{d^2U}{dH^2} = 1 . 2 . \mathfrak{C} + 2 . 3 . \mathfrak{D}H \ldots + r\text{-}1 . r . \mathfrak{R}H^{r-2}$

auch $\frac{d^3U}{dH^3} = 1 . 2 . 3 . \mathfrak{D} \ldots + r\text{-}2 . r\text{-}1 . r . \mathfrak{R}H^{r-3}$

und überhaupt

$\frac{d^rU}{dH^r} = 1 . 2 . 3 \ldots r\text{-}1 . r . \mathfrak{R} + 1 . 2 . 3 \ldots r . r{+}1 . \mathfrak{S} . H + \ldots$ seyn, bei allen Werthen des u, also auch bei $u = e$.

Folglich $\overset{u=e}{U} = \overset{u=e}{\mathfrak{A}} + \overset{u=e}{\mathfrak{B}H} + \overset{u=e}{\mathfrak{C}H^2} + \overset{u=e}{\mathfrak{D}H^3} + \ldots$

u. dieses mufs $\overset{u=e}{U} = \mathfrak{A}$ geben, weil ja für $u = e$ je-

des H vermöge der 1sten Bedingung sich vernullt; vermöge der 2ten und 3ten Bedingung aber **kein einziger Coefficient** $\mathfrak{R}$ sich **unendlich grofs** ergeben kann, indem ja jedes $\frac{d^rU}{dH^r}$ auch $= \frac{d^rU}{du^r} \cdot \frac{du^r}{dH^r}$ ist; das r aber jede bejahte ganze Zahl, also aufser jeder **schon abgereihten** $r = 1, = 2, = 3$ u. s. w. **auch jede noch folgende** ganze Zahl bedeutet.

Demnach ist man nun für jeden Coefficienten, bis zu welchem hin man die Differentialquotienten bereits benutzt hat, gewifs, dafs er

durch $\frac{d^rU}{dH^r} = 1.2.3.....r-1.r.\mathfrak{R}$, auf das völligste bestimmt wird; indem ja jedes etwa noch folgende Glied desselben, wegen des in ihm noch vorhandenen Factors H oder H^2 u. s. w. sich vernullen mufs.

§. 15. Dieser allgemeine Lehrsatz schliefst den obigen partiellen mit in sich, indem jener ein solches U, eine solche Function des u voraussetzt, welche selbst schon ein $\overset{u=e}{H = o}$ ausmacht, und für $e = o$ gewählt, dann auch den übrigen beiden Bedingungen des allgemeinen Lehrsatzes Genüge leistet. Wo dergleichen U gegeben ist, da wird man sich zuvörderst allerdings des einfacheren partiellen Lehrsatzes am liebsten bedienen. Sollte man aber dadurch keine erwünschte Reihe finden, oder sollte man überhaupt noch mehre andere Reihen verlangen: so wird man allemal auch nach dem allgemeinen Lehrsatze verfahren können.

Ueberhaupt aber wird uns die mehrfache Anwendung desselben ganz vorzüglich dadurch erleichtert werden, wenn wir ihn **auf einige** oftmals

brauchbare **Hülfsfunctionen H** im voraus uns eingeschränkt haben.

Die besonderen dadurch erreichten Reihen-Formen, nnd ihre Anwendung auf einige schwierige Functionen, will ich zur Integralrechnung auch deſshalb verschieben, weil es bei Abreihung einiger gebrochenen Functionen theoretisch und practisch nützlich ist, auch mit den Integrirungsregeln schon bekannt zu seyn.

Ob ich wohl daran gethan habe, manche Anwendung der Differentialrechnung, z. B. auf die Behandlung der höheren algebraischen Gleichungen, auf die schwierigen Eigenschaften der höheren Curven, u. s. w. hier nicht beizubringen, wird man erst beurtheilen können, wenn man auch diejenige angewandte Mathematik vor Augen hat, um welcher willen ich dieses Lehrbuch des reinen Infinitesimal-Calculs voranschicken muſste. Wenn z. B. die Evolvente des Kreises in der Maschinenlehre bei Zahn und Getriebe gebraucht wird: so ist es das rathsamste diese Evolution sogleich der dortigen Absicht gemäſs vorzutragen.

Dresden, gedruckt bei Carl Gottlob Gärtner.

Tab III

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 6

Fig. 5.

…ung aus Tab II.

…120.*

Fig. 25.

Dresden, gedruckt bei Carl Gottlob Gärtner.

Tab III

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 6

Fig. 5.

…ung aus Tab II.

Fig. 25.



